

Diplomarbeit

Fortsetzung periodischer Orbits in
konservativen und Hamiltonschen Systemen

vorgelegt von: Stefanie Hittmeyer

Betreuer: Prof. Dr. W.-J. Beyn

Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

im November 2009

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Fortsetzung periodischer Orbits in autonomen Systemen	7
1.1 Grundlagen	7
1.2 Lösungsmannigfaltigkeiten	9
1.3 Die Poincaréabbildung	17
2 Fortsetzung periodischer Orbits in konservativen Systemen	21
2.1 Normale periodische Orbits	22
2.2 Fortsetzung normaler periodischer Orbits	26
3 Hamiltonsche Systeme und ihre Symmetrien	33
3.1 Notationen	34
3.2 Das Noethertheorem	36
4 Fortsetzung periodischer Orbits in Hamiltonschen Systemen	41
4.1 Reduktion der Lösungsmannigfaltigkeit durch Symmetrien	41
4.2 Systeme mit Skalierungseigenschaft	45
5 Fortsetzung periodischer Orbits nahe einem Gleichgewichtspunkt	49
5.1 Hopf-Verzweigungen	49
5.2 Das Ljapunovsche Zentrumstheorem	51
6 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten periodischer Orbits	57
6.1 Eigenschaften stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten	57
6.2 Reduktion auf diskrete dynamische Systeme	58
6.3 Existenz- und Eindeigkeitssatz stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten	61
6.4 Konvergenzrate bei der Approximation instabiler Mannigfaltigkeiten . . .	62
7 Anwendung des Programmpakets AUTO	71
7.1 Die Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung	71
7.2 Fortsetzung von Gleichgewichtspunkten mit Entdeckung von Hopfpunkten	72
7.3 Fortsetzung periodischer Lösungen mit Start in einem Hopfpunkt	74
7.4 Fortsetzung periodischer Lösungen	75
7.5 Approximation instabiler Mannigfaltigkeiten periodischer Orbits	76

8 Beispiele	79
8.1 Das mathematische Pendel	79
8.2 Der Duffing-Oszillator	81
8.3 Das eingeschränkte Dreikörperproblem	83
8.3.1 Fortsetzung periodischer Orbits	85
8.3.2 Approximation instabiler Mannigfaltigkeiten periodischer Orbits .	88
A Diskretes und kontinuierliches Lemma von Gronwall	91
Symbolverzeichnis	93
Literaturverzeichnis	95

Einleitung

Viele Phänomene in Physik, Biologie, Chemie und anderen Wissenschaften lassen sich durch ein kontinuierliches dynamisches System beschreiben, das durch ein autonomes System von Differentialgleichungen

$$\dot{u} = g(u)$$

für ein glattes Vektorfeld g gegeben ist. Unter schwachen Voraussetzungen an g hat dieses System zu jedem Anfangswert u_0 eine eindeutige Lösung $\phi(t, u_0) = \phi^t(u_0)$ auf einem maximalen Intervall I , wobei ϕ^t als Fluss des Systems bezeichnet wird. Die Menge aller Punkte, die eine Lösung zum Anfangswert u_0 im Phasenraum \mathbb{R}^n unter der zeitlichen Entwicklung des Systems jemals durchläuft, bilden den Orbit

$$\{\phi^t(u_0) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Es gibt spezielle Lösungen, die Aufschluss über die Dynamik des Systems in ihrer Nähe geben. Dazu gehören einerseits Gleichgewichtspunkte, die unter der zeitlichen Entwicklung des Systems konstant bleiben, und andererseits periodische Lösungen, die sich unter der zeitlichen Entwicklung nach einer Periode T wiederholen.

In dieser Diplomarbeit werde ich die Fortsetzung periodischer Orbits nahe Gleichgewichtspunkten und periodischen Orbits in konservativen und Hamiltonschen Systemen untersuchen. Konservative Systeme sind Systeme, in denen entlang jeder Lösung gewisse Größen, wie zum Beispiel die Energie, erhalten bleiben. Hamiltonsche Systeme sind konservative Systeme, in denen die Erhaltungsgrößen spezielle Symmetrien des Systems liefern. Solche Systeme treten häufig in der klassischen Mechanik und in der Quantenmechanik auf.

Bei der Fortsetzung periodischer Orbits werde ich anhand der Ergebnisse aus [MFG⁺03] und [GVV07] vorgehen: Mit Hilfe der Erhaltungsgrößen konservativer Systeme und der Symmetrien Hamiltonscher Systeme werde ich spezielle parameterabhängige Systeme definieren. Diese kann man mit Hilfe der Verzweigungstheorie analysieren, das heißt man untersucht die Änderungen in der Dynamik des Systems, die bei Variation der Parameterwerte auftreten. Diese Methode ermöglicht Aussagen über die Struktur der periodischen Lösungen der ursprünglichen Systeme. So sieht man, dass sie in konservativen Systemen in Familien auftreten, die von der Anzahl der Erhaltungsgrößen abhängen. In Hamiltonschen Systemen kann man die Symmetrien sogar dazu nutzen die Dimension

dieser Familien auf einen Lösungszweig zu reduzieren. Ein weiterer Vorteil dieser Methode ist, dass sie die Berechnung periodischer Orbits mit Hilfe von Verzweigungssoftware, wie zum Beispiel AUTO ([DO09]), ermöglicht.

In der vorliegenden Arbeit werde ich außerdem die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten periodischer Orbits untersuchen. Die stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit ist die Menge aller Anfangswerte, deren Lösungen unter positiver bzw. negativer Zeitentwicklung gegen den periodischen Orbit konvergieren. Diese Mannigfaltigkeiten sind invariant unter der positiven und negativen zeitlichen Entwicklung des Systems. Sie teilen den Phasenraum lokal in Bereiche mit unterschiedlichem asymptotischen Verhalten. Deshalb ist es von hohem Interesse die Struktur dieser Mannigfaltigkeiten zu verstehen. Da man sie selten analytisch berechnen kann, möchte man sie in der Nähe des periodischen Orbits numerisch approximieren. Dies lässt sich ebenfalls mit Hilfe von Verzweigungssoftware durch Anwendung der in [BCD⁺02] und [KOD⁺05] beschriebenen Methode umsetzen. Ich werde in dieser Arbeit eine Abschätzung für das Konvergenzverhalten dieser Methode herleiten.

Im ersten Kapitel werde ich einige grundlegende Eigenschaften periodischer Orbits in autonomen Differentialgleichungssystemen beschreiben, auf die ich in den folgenden Kapiteln zurückgreifen werde. Dazu werde ich die Suche nach periodischen Orbits nahe einem gegebenen periodischen Orbit in ein Nullstellenproblem transformieren und die Bedingungen analysieren, unter denen der Satz über implizite Funktionen dafür die Existenz einer Lösungsmannigfaltigkeit liefert.

Im zweiten Kapitel werden die speziellen Eigenschaften konservativer Systeme vorgestellt und mit Hilfe der Erhaltungsgrößen ein parameterabhängiges System definiert, das gewisse Bedingungen für die Existenz einer Mannigfaltigkeit periodischer Lösungen erfüllt. Anschließend werde ich zeigen, dass die periodischen Lösungen dieses parameterabhängigen Systems periodische Lösungen des ursprünglichen Systems liefern.

Im darauffolgenden Kapitel werden die Grundbegriffe und Eigenschaften Hamiltonscher Systeme aufgezeigt und der Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Symmetrien hergeleitet.

Anschließend werde ich im vierten Kapitel zeigen, wie man mit Hilfe der Symmetrien Hamiltonscher Systeme die Mannigfaltigkeit periodischer Orbits aus dem zweiten Kapitel auf natürliche Weise auf einen eindimensionalen Zweig reduzieren kann, aus dem man die ganze Mannigfaltigkeit durch Anwendung der Symmetrien erhält.

In Kapitel sechs werde ich mit Hilfe des Hopf-Verzweigungstheorems das Ljapunovsche Zentrumstheorem für konservative Systeme beweisen. Dies liefert uns die Existenz einer Familie periodischer Orbits nahe einem Gleichgewichtspunkt, die man mit den Metho-

den der vorangegangenen Kapitel fortsetzen kann.

Im siebten Kapitel werde ich einige der Eigenschaften der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten periodischer Orbits untersuchen. Dazu wird das kontinuierliche System zunächst mit Hilfe der Poincaréabbildung auf ein diskretes dynamisches System mit einem Fixpunkt zurückgeführt, um dort das Konvergenzverhalten der Lösungen nahe der invarianten Mannigfaltigkeiten des Fixpunktes untersuchen zu können. Ich werde eine Abschätzung für das Konvergenzverhalten von Lösungen in einer Umgebung des Fixpunktes erhalten und auf einen Punkt im instabilen Unterraum anwenden, den ich für die numerische Approximation verwenden werde. Dabei werde ich auch die Zeit abschätzen, die eine Lösung mindestens in dieser Umgebung verbringt. Aus diesen Ergebnissen werde ich anschließend eine Abschätzung des Konvergenzverhaltens der Lösungen des kontinuierlichen Systems nahe der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten periodischer Orbits herleiten.

Zur Fortsetzung periodischer Orbits in konservativen und Hamiltonschen Systemen werde ich das Programmpaket AUTO verwenden. In Kapitel acht werde ich die darin verwendete Methode der Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung vorstellen und ihre Anwendung zur Fortsetzung periodischer Orbits kurz erläutern.

Im letzten Kapitel werden einige theoretische Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel anhand von Beispielen veranschaulicht. Für das mathematische Pendel und den Duffing-Oszillator werde ich mit Hilfe von AUTO periodische Orbits nahe den Gleichgewichtspunkten fortsetzen. Anschließend wird zunächst das allgemeine N -Körperproblem vorgestellt und anhand dessen Gleichungen für das eingeschränkte Dreikörperproblem hergeleitet. Für dieses Beispiel werde ich nahe den Gleichgewichtspunkten periodische Orbits fortsetzen und Lösungen auf ihren lokalen instabilen Mannigfaltigkeiten mit Hilfe der in Kapitel sieben vorgestellten Methode durch Fortsetzung approximieren.

An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei Prof. Wolf-Jürgen Beyn bedanken, der mich mit großem Engagement, viel Geduld und hilfreichen Ratschlägen bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt hat. Weiterer Dank gilt den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Dynamische Systeme, insbesondere Dr. Thorsten Hüls für die vielen fachlichen Anregungen und Diskussionen. Zu guter Letzt möchte mich bei meiner Familie herzlich für die Unterstützung während meines gesamten Studiums bedanken.

1 Fortsetzung periodischer Orbits in autonomen Systemen

In diesem Kapitel werden wir zunächst einige grundlegende Eigenschaften periodischer Orbits in autonomen Differentialgleichungssystemen beschreiben. Dabei werden wir gemäß der Ergebnisse aus [MFG⁺03], Abschnitt 2, vorgehen.

Unser Ziel ist es periodische Orbits nahe einem gegebenen periodischen Orbit zu finden. Dazu werden wir diese Problemstellung in ein Nullstellenproblem transformieren, zu dem uns der Satz über implizite Funktionen unter gewissen Voraussetzungen eine Lösungsmannigfaltigkeit mit den Anfangspunkten periodischer Orbits garantiert, die durch „Fortsetzung“ aus dem gegebenen Orbit hervorgehen. In Vorbereitung auf die Anwendung in konservativen und insbesondere Hamiltonschen Systemen werden wir diese Voraussetzungen zunächst für autonome Systeme untersuchen.

1.1 Grundlagen

Seien $n, k, l \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten ein Multi-Parameter-System

$$\dot{u} = g(u, \alpha) \tag{1.1}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}^k, g \in C^l(\Omega \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Gleichung (1.1) sei eine Störung der Gleichung

$$\dot{u} = g_0(u) := g(u, 0). \tag{1.2}$$

Definition 1.1. Für ein $\alpha \in \mathbb{R}^k$ sei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von System (1.1). Dann heißt u periodisch mit Periode T oder T -periodisch, wenn es ein $T > 0$ gibt, sodass

$$u(0) = u(T).$$

Den zugehörigen Orbit

$$\Gamma := \{u(t) | t \in \mathbb{R}\} = \{u(t) | t \in [0, T]\}$$

nennt man T -periodischen Orbit.

Da die Funktion g mindestens einmal stetig differenzierbar ist, ist sie auch lokal Lipschitz-beschränkt. Damit folgt nach dem Satz von Picard-Lindelöf die Existenz und

Eindeutigkeit der Lösungen von System (1.1) zu einem Anfangswert $u(0) \in \Omega$. Also ist die Bedingung $u(0) = u(T)$ aus Definition 1.1 äquivalent zu

$$u(t) = u(t + T) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.2. *Für ein $\alpha \in \mathbb{R}^k$ sei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine T -periodische Lösung von System (1.1). Dann gilt*

(i) *für alle $m \in \mathbb{N}$ ist u periodisch mit Periode mT und*

(ii) *für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ ist die zu u um t_0 phasenverschobene Funktion*

$$v(t) := u(t + t_0)$$

ebenfalls eine T -periodische Lösung von (1.1).

Insbesondere sind die zugehörigen periodischen Orbits gleich, also

$$\{u(t) | t \in [0, T]\} = \{u(t) | t \in [0, mT]\} = \{u(t + t_0) | t \in [0, T]\}.$$

Beweis. (i) Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung zum Anfangswert $u(0)$ ist

$$u(0) = u(T) = u(2T) = \dots = u(mT).$$

(ii) Die Funktion $v(t)$ löst System (1.1) und es gilt

$$v(0) = u(t_0) = u(t_0 + T) = v(T). \quad \square$$

Für α nahe 0 wollen wir periodische Lösungen des gestörten Systems (1.1) nahe einer gegebenen periodischen Lösung des ungestörten Systems (1.2) finden. Um nicht mehrmals den gleichen periodischen Orbit zu verschiedenen Anfangswerten und Perioden zu erhalten, stellen wir an die periodischen Lösungen folgende Forderungen:

1. Die Periode einer periodischen Lösung soll minimal sein.
2. Es soll nur ein Repräsentant einer Familie phasenverschobener periodischer Lösungen gefunden werden.

Um diese beiden Forderungen bei der Suche periodischer Orbits umzusetzen und die Struktur der periodischen Orbits nahe einem gegebenen zu analysieren, transformieren wir System (1.1):

Proposition 1.3. (i) *Betrachte die skalierte Gleichung*

$$\dot{u} = Tg(u, \alpha). \quad (1.3)$$

Dann sind T -periodische Lösungen des unskalierten Systems (1.1) äquivalent zu 1-periodischen Lösungen des skalierten Systems (1.3).

(ii) Sei $\tilde{u}(t; p, T, \alpha)$ die Lösung von (1.3), sodass $\tilde{u}(0; p, T, \alpha) = p$. Definiere die Funktion

$$G_0 \in \mathcal{C}^l(\Omega \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$$

durch

$$G_0(p, T, \alpha) := \tilde{u}(1; p, T, \alpha) - p.$$

Dann ist das Finden 1-periodischer Lösungen von (1.3) äquivalent zum Lösen von

$$G_0(p, T, \alpha) = 0. \tag{1.4}$$

Beweis. (i) Falls $u(t)$ eine Lösung von (1.1) ist, erfüllt $v(t) := u(Tt)$ Gleichung (1.3) und es ist

$$v(1) = u(T) = u(0) = v(0).$$

Ist umgekehrt $v(t)$ eine 1-periodische Lösung von (1.3), so erfüllt $u(t) := v(\frac{1}{T}t)$ Gleichung (1.1) mit

$$u(T) = v(1) = v(0) = u(0).$$

(ii) Ist $\tilde{u}(t; p, T, \alpha)$ eine 1-periodische Lösung von (1.3), so gilt

$$\begin{aligned} G_0(p, T, \alpha) &= \tilde{u}(1; p, T, \alpha) - p \\ &= \tilde{u}(0; p, T, \alpha) - p \\ &= p - p = 0. \end{aligned}$$

Sei umgekehrt (p, T, α) Lösung von (1.4), dann ist $\tilde{u}(t; p, T, \alpha)$ Lösung von (1.3) mit

$$\tilde{u}(1; p, T, \alpha) = p = \tilde{u}(0; p, T, \alpha). \quad \square$$

1.2 Lösungsmannigfaltigkeiten

Definition 1.4. Sei $G_0 \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ für ein $l \geq 1$ und $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann heißt G_0 Submersion in x_0 , falls die Jacobimatrix

$$DG_0(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

surjektiv ist.

Definition 1.5. (Vgl. [AE06], Kapitel VII.9) Sei $l \geq 1$ und $n \leq m$. Eine Teilmenge M des \mathbb{R}^m heißt n -dimensionale \mathcal{C}^l -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m , wenn es zu jedem $x_0 \in M$ eine in \mathbb{R}^m offene Umgebung U von x_0 , eine offene Menge V in \mathbb{R}^m sowie ein $f \in \mathcal{C}^l(U, V)$ gibt mit

$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Satz 1.6. Sei $G_0 \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $m > n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^m$ Lösung von $G_0(x) = 0$. Sei außerdem G_0 eine Submersion in x_0 . Dann ist die Lösungsmenge von $G_0(x) = 0$ nahe x_0 eine $(m - n)$ -dimensionale \mathcal{C}^l -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m .

Beweis. Da G_0 eine Submersion in x_0 ist, ist

$$\text{Rang}(DG_0(x_0)) = n.$$

O.B.d.A. ist für $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ und $x_0 = (y_0, z_0)$

$$DG_0(x_0) = (D_y G_0(x_0), D_z G_0(x_0))$$

mit $D_z G_0(y_0, z_0)$ invertierbar.

Dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen offene Umgebungen $Y \subset \mathbb{R}^{m-n}$ von y_0 und $M \subset \mathbb{R}^m$ von (y_0, z_0) und ein $h \in \mathcal{C}^l(Y, \mathbb{R}^n)$ mit $h(y_0) = z_0$, sodass

$$G(y, z) = 0 \text{ für } (y, z) \in M \Leftrightarrow z = h(y) \text{ für } y \in Y.$$

Sei $h(Y) = \{h(y) | y \in Y\}$ das Bild von Y unter h . Setze $U := Y \times h(Y) = M$ und $V = h(Y) \times \{0\}$. Dann sind U und V offen, da Y offen und h stetig ist. Definiere $f : U \rightarrow V$ durch $f(y, h(y)) = (h(y), 0)$. Dann ist $f \in \mathcal{C}^l(U, \mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$f(U \cap M) = f(U) = (h(Y), 0) = h(Y) \times \{0\} = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Damit ist M eine $(m - n)$ -dimensionale \mathcal{C}^l -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m . □

Dieses Ergebnis ist konsistent unter kleinen Störungen: Für $\epsilon \in \mathbb{R}$ sei $G_\epsilon \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $m > n$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung von $G_0(x) = 0$ und G_0 eine Submersion in $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann ist für ϵ hinreichend klein $G_\epsilon(x_0) = 0$ und G_ϵ eine Submersion in x_0 . Also ist für jedes hinreichend kleine ϵ die Lösungsmenge von $G_\epsilon(x) = 0$ nahe x_0 eine $(m - n)$ -dimensionale \mathcal{C}^l -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m .

Im Folgenden werden wir \mathcal{C}^l -Funktionen wie g und G_0 als *glatte Funktionen* und die dazugehörigen \mathcal{C}^l -Untermannigfaltigkeiten aus Satz 1.6 als *glatte (Unter-)Mannigfaltigkeiten* oder *Lösungsmannigfaltigkeiten* bezeichnen.

Für den Fall $m = n + 1$ handelt es sich bei der glatten Mannigfaltigkeit aus Satz 1.6 um eine eindimensionale Lösungsmannigfaltigkeit. Ein solcher *Lösungszweig* kann

direkt numerisch berechnet werden (vgl. Kapitel 7). Für den Fall $m > n + 1$ werden wir zusätzliche Bedingungen aufstellen, um $x \in \mathbb{R}^m$ auf eine $(n + 1)$ -dimensionale Teilmenge des \mathbb{R}^m zu beschränken:

Folgerung 1.7. Seien G_0 und x_0 wie in Satz 1.6. Sei eine Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m-n-1})$ gegeben, sodass

$$A(\text{Ker}(DG_0(x_0))) = \mathbb{R}^{m-n-1}.$$

Dann ist die Lösungsmenge der Gleichungen

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 0 \\ A(x - x_0) &= 0 \end{aligned}$$

eine glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m .

Beweis. Definiere $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ durch

$$G(x) := \begin{pmatrix} G_0(x) \\ A(x - x_0) \end{pmatrix},$$

dann ist $G(x_0) = 0$ und

$$DG(x_0) = \begin{pmatrix} DG_0(x_0) \\ A \end{pmatrix}.$$

Sei W ein komplementärer Unterraum von $\text{Ker}(DG_0(x_0))$ in \mathbb{R}^m . Dann ist

$$\begin{aligned} DG(x_0)(\mathbb{R}^m) &= \begin{pmatrix} DG_0(x_0) \\ A \end{pmatrix} (\text{Ker} DG_0(x_0) + W) \\ &= \begin{pmatrix} DG_0(x_0) \\ A \end{pmatrix} (\text{Ker} DG_0(x_0)) + \begin{pmatrix} DG_0(x_0) \\ A \end{pmatrix} (W) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^{m-n-1} \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{R}^{m-1}. \end{aligned}$$

Damit ist $DG(x_0)$ surjektiv auf \mathbb{R}^{m-1} und wir erhalten wir nach Satz 1.6 lokal einen eindimensionalen Lösungsweig der Gleichung $G_0(x) = 0$, der die zusätzliche Bedingung $A(x - x_0) = 0$ erfüllt. \square

Sei $\tilde{u}(t; p, T, \alpha)$ die allgemeine Lösung des skalierten Systems $\dot{u} = Tg(u, \alpha)$ wie in Proposition 1.3, $p_0 \in \Omega$ und $T_0 > 0$, sodass $(p_0, T_0, 0)$ eine Lösung von $G_0(p, T, \alpha) = 0$ ist. Nach Definition ist

$$u_0(t) := \tilde{u}(t; p_0, T_0, 0)$$

eine 1-periodische Lösung der ungestörten Gleichung

$$\dot{u} = T_0 g_0(u).$$

Sei 1 die minimale Periode von $u_0(t)$. Dann kann u_0 nicht konstant sein, $\dot{u}_0(t) \neq 0$ und insbesondere ist

$$g_0(p_0) = T_0^{-1} \dot{u}_0(0) \neq 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Wir wollen mithilfe von Satz 1.6 eine Lösungsmannigfaltigkeit von $G_0(x) = 0$ nahe x_0 finden. Um Bedingungen aufstellen zu können, sodass G_0 eine Submersion in x_0 ist, berechnen wir die totale Ableitung von G_0 an der Stelle x_0 .

Proposition 1.8. *Seien \tilde{u} und G_0 wie in Proposition 1.3, $(p_0, T_0, 0)$ eine Lösung von $G_0(p, T, \alpha) = 0$ und $u_0(t) = \tilde{u}(t; p_0, T_0, 0)$. Dann löst die matrixwertige Funktion*

$$V(t) := D_p \tilde{u}(t; p_0, T_0, 0)$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= T_0 D g_0(u_0(t)) V(t), \\ V(0) &= I, \end{aligned}$$

das heißt $V(t)$ ist die Fundamentalmatrix der Variationsgleichung

$$\dot{v} = T_0 D g_0(u_0(t)) v. \tag{1.5}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= D_p \dot{\tilde{u}}(t; p_0, T_0, 0) \\ &= D_p T_0 g(\tilde{u}(t; p_0, T_0, 0), 0) \\ &= D_p T_0 g_0(\tilde{u}(t; p_0, T_0, 0)) \\ &= T_0 D g_0(u_0(t)) V(t) \end{aligned}$$

und $V(0) = I$. □

Definition 1.9. *Sei $V(t)$ wie in Proposition 1.8. Dann nennt man die Matrix*

$$M := V(1)V(0)^{-1} = V(1)$$

die Monodromiematrix der periodischen Lösung $u_0(t)$ und die Eigenwerte von M heißen (charakteristische) Multiplikatoren oder Floquet-Multiplikatoren.

Bemerkung 1.10. Gleichung (1.5) ist periodisch, eine Lösung $v(t)$ aber nicht unbedingt. Die Monodromiematrix M ist ein Maß für die „Nicht-Periodizität“ der Lösungen $v(t)$: Die Multiplikatoren messen, wie sehr die Lösungen in einer Periode ausgedehnt, kontrahiert oder rotiert werden.

Ist $v(t)$ Lösung der inhomogenen Variationsgleichung

$$\dot{v} = T_0 Dg_0(u_0(t))v + b(t) \quad (1.6)$$

zum Anfangswert $v(0) = 0$ mit $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so gilt nach Variation der Konstanten

$$v(t) = V(t) \int_0^t V(s)^{-1} b(s) ds. \quad (1.7)$$

Satz 1.11. Seien \tilde{u} und G_0 wie in Proposition 1.3, $(p_0, T_0, 0) \in \Omega \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^k$ eine Lösung von

$$G_0(p, T, \alpha) = 0,$$

$u_0(t) = \tilde{u}(t; p_0, T_0, 0)$ und $V(t)$ wie in Proposition 1.8. Dann ist die Jacobimatrix von G_0 an der Stelle $(p_0, T_0, 0)$ gegeben durch

$$DG_0(p_0, T_0, 0) \cdot (p, T, \alpha) = (M - I)p + Tg_0(p_0) + D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0)\alpha, \quad (1.8)$$

wobei

$$D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0) = T_0 M \int_0^1 V(s)^{-1} D_\alpha g(u_0(s), 0) ds.$$

Beweis. Berechne die partiellen Ableitungen $D_p G_0(x_0)$, $D_T G_0(x_0)$ und $D_\alpha G_0(x_0)$:

$$\begin{aligned} D_p G_0(p_0, T_0, 0) &= D_p \tilde{u}(1; p_0, T_0, 0) - I \\ &= M - I. \end{aligned}$$

$\dot{u}_0(t)$ und damit auch $g_0(u_0(t))$ sind 1-periodische Lösungen der Variationsgleichung (1.5). Da $V(t)$ die Fundamentalmatrix dieser Gleichung ist, lässt sich die Lösung $g_0(u_0(t))$ darstellen als

$$g_0(u_0(t)) = V(t)g_0(p_0)$$

und für $t = 1$ ist insbesondere $g_0(p_0) = M g_0(p_0)$. Damit ist 1 ein Floquet-Multiplikator und

$$g_0(p_0) \in \text{Ker}(M - I).$$

Es ist

$$D_T G_0(p_0, T_0, 0) = \frac{\partial}{\partial T} \tilde{u}(1; p_0, T_0, 0).$$

Die Funktion

$$w(t) := \frac{\partial}{\partial T} \tilde{u}(t; p_0, T_0, 0)$$

erfüllt die inhomogene Variationsgleichung (1.6) mit $b(t) = g_0(u_0(t))$ zum Anfangswert $w(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{\partial}{\partial T} (Tg(\tilde{u}(t; p_0, T, 0), 0))|_{T=T_0} \\ &= T_0 Dg_0(u_0(t))w(t) + g_0(u_0(t)). \end{aligned}$$

Dann erhalten wir mit Hilfe von (1.7), mit $g_0(p_0) = Mg_0(p_0)$ und

$$g_0(p_0) = V(t)^{-1}g_0(u_0(t))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D_T G_0(p_0, T_0, 0) &= w(1) = V(1) \int_0^1 V(s)^{-1} g_0(u_0(s)) ds \\ &= M \int_0^1 g_0(p_0) ds \\ &= g_0(p_0). \end{aligned}$$

Zuletzt ist

$$D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0) = D_\alpha \tilde{u}(1; p_0, T_0, 0).$$

Die Funktion

$$z(t) := D_\alpha \tilde{u}(t; p_0, T_0, 0)$$

erfüllt die inhomogene Variationsgleichung (1.6) mit $b(t) = T_0 D_\alpha g(u_0(t), 0)$ zum Anfangswert $z(0) = 0$:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= D_\alpha T_0 g(\tilde{u}(t; p_0, T_0, \alpha), \alpha)|_{\alpha=0} \\ &= T_0 D g_0(u_0(t)) z(t) + T_0 D_\alpha g(u_0(t), 0).\end{aligned}$$

Mit (1.7) und $g_0(p_0) = M g_0(p_0)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0) = z(1) &= V(1) \int_0^1 V(s)^{-1} T_0 D_\alpha g(u_0(s), 0) ds \\ &= T_0 M \int_0^1 V(s)^{-1} D_\alpha g(u_0(s), 0) ds.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt

$$DG_0(p_0, T_0, 0) \cdot (p, T, \alpha) = (M - I)p + T g_0(p_0) + D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0) \alpha. \quad \square$$

Im folgenden Satz stellen wir eine zusätzliche Bedingung an die Lösungen der Gleichung $G_0(p, T, \alpha) = 0$, eine sogenannte *Phasenbedingung*, um nur einen Repräsentanten einer Familie phasenverschobener periodischer Orbits zu erhalten (vergleiche Proposition 1.2 (ii)):

Satz 1.12. *Sei G_0 definiert wie in Proposition 1.3 (ii) und $p_0 \in \Omega$, $T_0 > 0$ gegeben, sodass $G_0(p_0, T_0, 0) = 0$ und G_0 eine Submersion in $(p_0, T_0, 0)$ ist. Definiere eine Funktion*

$$G \in \mathcal{C}^1(\Omega \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

durch

$$G(p, T, \alpha) := \begin{pmatrix} G_0(p, T, \alpha) \\ \langle g_0(p_0), p - p_0 \rangle \end{pmatrix},$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n . Dann bildet die Lösungsmenge von

$$G(p, T, \alpha) = 0 \tag{1.9}$$

lokal bei $(p_0, T_0, 0)$ eine glatte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$.

Beweis. $G(p_0, T_0, 0) = 0$ ist klar. Sei das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt. Die Jacobimatrix von G an der Stelle $(p_0, T_0, 0)$ ist gegeben durch

$$DG(p_0, T_0, 0) = \begin{pmatrix} DG_0(p_0, T_0, 0) \\ (g_0(p_0))^T, 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Aus (1.8) und $g_0(p_0) \in \text{Ker}(M - I)$ folgt

$$\begin{aligned} DG_0(p_0, T_0, 0) \cdot (g_0(p_0), 0, 0) &= (M - I)g_0(p_0) + 0 \cdot g_0(p_0) + D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0) \cdot 0 \\ &= (M - I)g_0(p_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $(g_0(p_0), 0, 0) \in \text{Ker}(DG_0(p_0, T_0, 0))$ und deshalb gilt

$$\mathbb{R} = (g_0(p_0)^T, 0, 0) \cdot \text{Ker}(DG_0(p_0, T_0, 0)).$$

Analog zur Argumentation im Beweis von Folgerung 1.7 ist $DG(p_0, T_0, 0)$ surjektiv. Damit folgt aus Satz 1.6, dass die Lösungsmenge von

$$G(p, T, \alpha) = 0$$

lokal bei $(p_0, T_0, 0)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension

$$(n + 1 + k) - (n + 1) = k$$

bildet. □

Als Nächstes geben wir eine mögliche Bedingung an p_0 und T_0 an, sodass G_0 eine Submersion in $(p_0, T_0, 0)$ ist:

Satz 1.13. *Sei $u_0(t)$ eine 1-periodische Lösung von $\dot{u} = T_0 g_0(u)$. Sei $V(t)$ die Fundamentalmatrix der Variationsgleichung (1.5) und der Eigenwert 1 der Monodromiematrix $M = V(1)$ sei einfach. Dann gibt es glatte Abbildungen $p^* : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $T^* : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p^*(0) = p_0$ und $T^*(0) = T_0$ sodass für alle α in einer hinreichend kleinen Umgebung des Ursprungs von \mathbb{R}^k die Lösung $\tilde{u}(t; p^*(\alpha), T^*(\alpha), \alpha)$ von (1.3) 1-periodisch ist. Außerdem sind dies bis auf Phasenverschiebungen die einzigen 1-periodischen Lösungen von (1.3) mit T nahe T_0 und mit Orbit nahe $\Gamma_0 := \{u_0(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.*

Beweis. 1 ist ein einfacher Eigenwert mit Eigenvektor $g_0(p_0)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \text{Im}(M - I) \oplus \text{Ker}(M - I) \\ &= \text{Im}(M - I) \oplus \mathbb{R}g_0(p_0). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Sei G definiert wie in Satz 1.12. Aus (1.8) folgt für alle $(p, T) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$D_{(p,T)}G_0(p_0, T_0, 0)(p, T) = (M - I)p + Tg_0(p_0).$$

Somit ist $D_{(p,T)}G_0(p_0, T_0, 0)$ und damit auch $D_{(p,T)}G(p_0, T_0, 0)$ surjektiv. Außerdem ist

$D_{(p,T)}G(p_0, T_0, 0)$ injektiv: Sei $D_{(p,T)}G(p_0, T_0, 0)(p, T) = 0$. Daraus folgt

$$(M - I)p + Tg_0(p_0) = 0 \wedge g_0(p_0)^T p = 0.$$

Wegen (1.10) folgt aus der ersten Gleichung $T = 0$ und $p \in \text{Ker}(M - I) = \mathbb{R}g_0(p_0)$. Damit folgt aus der zweiten Gleichung $p = 0$.

Also ist $D_{(p,T)}G(p_0, T_0, 0)$ invertierbar und nach dem Satz 1.6 lässt sich die k -dimensionale Lösungsmannigfaltigkeit von (1.9) in einer Umgebung von 0 durch $\alpha \in \mathbb{R}^k$ parametrisieren. \square

1.3 Die Poincaréabbildung

Warum wurde mit Einführung der zusätzlichen Bedingung

$$\langle g_0(p_0), p - p_0 \rangle = 0$$

in Satz 1.12 das Problem der Phasenverschiebung gelöst? Dazu betrachten wir die zugehörige *Poincaréabbildung*.

Definition 1.14. (Vgl. [Bey91], Abschnitt I.3) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für ein $l \geq 1$ sei $g \in \mathcal{C}^l(\Omega \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, $p_0 \in \Omega$, U eine Umgebung von p_0 in Ω und $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\psi(p_0) = 0$ und

$$D\psi(p)g(p, \alpha) \neq 0$$

für alle $p \in U$. Dann nennt man die Hyperfläche

$$\Sigma = \{p \in U \mid \psi(p) = 0\}$$

Poincaréschnitt des Systems $\dot{u} = g(u, \alpha)$ bei p_0 .

Sei $\phi^t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Fluss des Systems $\dot{u} = g(u, \alpha)$, also $\phi^t(p)$ die Lösung zum Anfangswert $p \in \Omega$. Ist p_0 ein Punkt eines T_0 -periodischen Orbits von $\dot{u} = g(u, \alpha)$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}^k$, so durchstößt eine Lösung $\phi^t(p)$ nach einer wohldefinierten Zeit $\tau = \tau(p)$ nahe T_0 wieder den Poincaréschnitt Σ bez. p_0 : Für ein solches $\tau \in \mathbb{R}_+$ soll

$$\psi(\phi^\tau(p)) = 0$$

gelten. Für $(\tau, p) = (T_0, p_0)$ gilt

$$\begin{aligned} & \psi(\phi^{T_0}(p_0)) = \psi(p_0) = 0 \\ & \wedge D_\tau(\psi(\phi^{T_0}(p_0))) \\ & = D\psi(\phi^{T_0}(p_0))D_\tau\phi^{T_0}(p_0) \\ & = D\psi(p_0)g(p_0, \alpha) \neq 0. \end{aligned}$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen erhalten wir auf einer Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von p_0 eine eindeutige glatte Abbildung $\tau : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\psi(\phi^{\tau(p)}(p)) = 0$ und $\tau(p_0) = T_0$. Die Zeit $\tau(p)$ heißt *Auftreffzeit* und der Punkt $\phi^{\tau(p)}(p)$ *Auftreffpunkt* der bei p gestarteten Lösung. Dies ermöglicht uns folgende Definition:

Definition 1.15. (Vgl. [PM82], Abschnitt 3.1) Für ein $\alpha \in \mathbb{R}^k$ sei Γ ein T_0 -periodischer Orbit von $\dot{u} = g(u, \alpha)$ und Σ ein Poincaréschnitt des Systems durch einen Punkt p_0 des Orbits wie in Definition 1.14. Sei die Auftreffzeit $\tau(p)$ definiert auf einer Umgebung \tilde{U} von p_0 . Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} P : \tilde{U} &\rightarrow \Sigma \\ p &\mapsto P(p) = \phi^{\tau(p)}(p) \end{aligned}$$

Poincaréabbildung des periodischen Orbits Γ bezüglich Σ und p_0 .

Abbildung 1.1 veranschaulicht die Konstruktion der Poincaréabbildung.

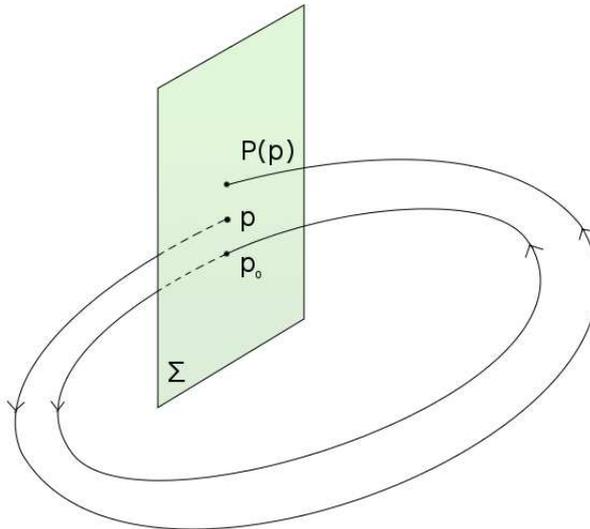


Abbildung 1.1: Poincaréabbildung

Proposition 1.16. *Sei Γ ein periodischer Orbit von $\dot{u} = g(u, \alpha)$ mit $g \in \mathcal{C}^l(\Omega \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

- (i) *Es existiert eine Poincaréabbildung des periodischen Orbits Γ .*
- (ii) *Es seien $P : V \rightarrow \Sigma$, $P' : V' \rightarrow \Sigma'$ zwei Poincaréabbildungen von Γ bezüglich der Poincaréschnitte Σ und Σ' durch die Punkte $p \in \Sigma$ und $p' \in \Sigma'$. Dann sind P und P' lokal konjugiert, das heißt es existieren offene Umgebungen $V_0 \subset V \cap P(V)$ von p und $V'_0 \subset V' \cap P'(V')$ von p' und ein \mathcal{C}^l -Diffeomorphismus $H : V_0 \rightarrow V'_0$, sodass*

$$P'(H(u)) = H(P(u))$$

für alle $u \in V_0$ und $H(p) = p'$.

Beweis. Siehe [AM78], Abschnitt 7.1 oder [PM82], Abschnitt 3.1. □

Folgerung 1.17. *Seien G_0 und $(p_0, T_0, 0)$ wie in Satz 1.12. Dann enthält die Lösungsmenge von (1.9) keine zueinander phasenverschobenen Lösungen: Sei (p_1, T_1, α_1) eine Lösung von Gleichung (1.9), sei also p_1 Anfangspunkt einer T_1 -periodischen Lösung des Systems $\dot{u} = g(u, \alpha_1)$, die die Phasenbedingung*

$$\langle g_0(p_0), p_1 - p_0 \rangle = 0 \tag{1.11}$$

erfüllt. Die Hyperfläche

$$\Sigma = \{p \in \Omega \mid \langle g_0(p_0), p - p_0 \rangle = 0\}$$

ist für $\|\alpha_1\|$ hinreichend klein ein Poincaréschnitt des Systems $\dot{u} = g(u, \alpha_1)$. Die Poincaréabbildung P bildet p_1 ab auf

$$P(p_1) = \phi^{T_1}(p_1) = p_1.$$

Damit ist p_1 ein Fixpunkt der Poincaréabbildung.

Damit werden durch die Phasenbedingung (1.11) nur die Anfangspunkte periodischer Orbits geliefert, die auf dem Poincaréschnitt Σ liegen.

2 Fortsetzung periodischer Orbits in konservativen Systemen

In diesem Kapitel werden wir die speziellen Eigenschaften konservativer Systeme kennenlernen und untersuchen, wie wir sie bei der Fortsetzung periodischer Orbits nutzen können. Dies wird die Definition normaler periodischer Orbits motivieren, mit Hilfe derer man die Erhaltungsgrößen eines konservativen Systemes nutzen kann um die Dimension der Lösungsmannigfaltigkeit aus dem vorherigen Kapitel zu reduzieren.

Die Resultate dieses Kapitels entsprechen denen des dritten Abschnitts von [MFG⁺03].

Wir betrachten wieder für ein glattes Vektorfeld $g_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, einen periodischen Orbit

$$\Gamma_0 = \{u_0(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (2.1)$$

des Systems

$$\dot{u} = g_0(u)$$

mit minimaler Periode $T_0 > 0$. Sei $V(t)$ die Fundamentalmatrix der Variationsgleichung wie in Proposition 1.8 und $M = V(1)$ die Monodromiematrix. Es seien

$$m_g := \dim \text{Ker}(M - I)$$

und

$$m_a := \dim \text{Ker}((M - I)^n)$$

die geometrische und die algebraische Vielfachheit des Floquet-Multiplikators 1.

Wie in Kapitel 1 sei $\tilde{u}(t; p, T, \alpha)$ die allgemeine Lösung des skalierten gestörten Systems

$$\dot{u} = Tg(u, \alpha)$$

zum Anfangswert $p \in \Omega$, wobei $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt und $g(u, 0) = g_0(u)$ für $u \in \Omega$.

Definition 2.1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}^k$. Eine glatte Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt erstes Integral von $g(\cdot, \alpha)$, falls für alle $u \in \Omega$

$$DF(u) \cdot g(u, \alpha) = 0.$$

Das System $\dot{u} = g(u, \alpha)$ heißt konservativ, wenn $g(\cdot, \alpha)$ mindestens ein erstes Integral besitzt, sonst heißt es dissipativ.

Falls zwei Funktionen F, \tilde{F} erste Integrale von $g(\cdot, \alpha)$ sind, so sind die Funktionen $F + \tilde{F}$, λF und $F + c$ für alle $\lambda, c \in \mathbb{R}$ ebenfalls erste Integrale. Den Vektorraum der

ersten Integrale von g_0 bezeichnen wir mit \mathcal{F} . Wir nennen zwei erste Integrale F und \tilde{F} *abhängig*, falls $F - \tilde{F} \in \mathbb{R}$.

Ist F ein erstes Integral des ungestörten skalierten Systems

$$\dot{u} = Tg_0(u),$$

also $F \in \mathcal{F}$, dann gilt für alle $(t, p, T) \in \mathbb{R} \times \Omega \times (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(\tilde{u}(t; p, T, 0)) &= DF(\tilde{u}(t; p, T, 0)) \cdot \dot{\tilde{u}}(t; p, T, 0) \\ &= TDF(\tilde{u}(t; p, T, 0)) \cdot g_0(\tilde{u}(t; p, T, 0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$F(\tilde{u}(t; p, T, 0)) = F(\tilde{u}(0; p, T, 0)) = F(p) \quad (2.2)$$

Also verlaufen die Lösungen von $\dot{u} = g_0(u)$ auf festen Niveaumengen von F . Die ersten Integrale sind gerade die *Erhaltungsgrößen* eines Systems, also die Größen, die entlang der Lösungen konstant bleiben. Sie hängen nur vom Anfangwert einer Lösung, nicht aber von der Zeit ab.

2.1 Normale periodische Orbits

In Kapitel 1 haben wir das Problem der Fortsetzung periodischer Orbits umformuliert in das Nullstellenproblem $G_0(p, T, \alpha) = 0$ nahe der Lösung $(p_0, T_0, 0)$. Um zeigen zu können, dass G_0 unter bestimmten Voraussetzungen eine Submersion in $(p_0, T_0, 0)$ ist und damit in der Nähe eine glatte Lösungsmannigfaltigkeit existiert, werden wir den Begriff des normalen periodischen Orbits einführen. Diesen werden wir motivieren, indem wir den Zusammenhang zwischen der Jacobimatrix $DG_0(p_0, T_0, 0)$ und den ersten Integralen untersuchen.

Proposition 2.2. *Sei F ein erstes Integral von g_0 und $\Gamma_0 = \{u_0(t) | t \in \mathbb{R}\}$ ein T_0 -periodischer Orbit mit $u_0(0) = p_0$. Ferner sei*

$$W := \{\nabla F(p_0) \mid F \in \mathcal{F}\} \quad (2.3)$$

der Vektorraum der Gradienten der ersten Integrale ausgewertet in p_0 mit Dimension

$$k := \dim W.$$

Das orthogonale Komplement von W sei

$$W^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n \mid DF(p_0)x = 0 \forall F \in \mathcal{F}\}$$

und m_a sei die algebraische Vielfachheit des Multiplikators 1. Dann gilt

$$(i) \quad \text{Im}(M - I) + \mathbb{R}g_0(p_0) \subset W^\perp \quad (2.4)$$

und

$$(ii) \quad m_a \geq k + 1.$$

Beweis. (i) Wähle $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}$, sodass $\nabla F_1(p_0), \dots, \nabla F_k(p_0)$ eine Basis von W bilden.

Für $F \in \mathcal{F}$ fest gilt nach (2.2)

$$F(\tilde{u}(t; p, T, 0)) = F(p).$$

Differentiation nach p im Punkt $(t; p_0, T_0, 0)$ liefert

$$\begin{aligned} DF(u_0(t)) \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial p}(t; p_0, T_0, 0)p &= DF(u_0(t)) \cdot V(t)p \\ &= DF(p_0)p, \end{aligned} \quad (2.5)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgt insbesondere für $t = 1$ und für alle $p \in \mathbb{R}^n$

$$DF(p_0)(M - I)p = 0.$$

Damit gilt für jedes $F \in \mathcal{F}$

$$\text{Im}(M - I) \subset \text{Ker}(DF(p_0)). \quad (2.6)$$

Also ist

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(M - I)) &\leq \dim(\text{Ker}(DF(p_0))) \\ \Rightarrow \quad n - m_g &\leq n - k \\ \Rightarrow \quad m_g &\geq k. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Da F ein erstes Integral von g_0 ist, gilt nach Definition für alle $F \in \mathcal{F}$

$$g_0(p_0) \in \text{Ker}(DF(p_0)). \quad (2.8)$$

Wegen (2.6) und (2.8) ist

$$\begin{aligned} DF(p_0)(\text{Im}(M - I) + \mathbb{R}g_0(p_0)) &= 0 \quad \forall F \in \mathcal{F} \\ \Rightarrow \quad \text{Im}(M - I) + \mathbb{R}g_0(p_0) &\subset W^\perp. \end{aligned}$$

- (ii) Wir wissen bereits aus (2.7), dass $m_g \geq k$. Falls sogar $m_g \geq k + 1$, so gilt wegen $m_a \geq m_g$ insbesondere $m_a \geq k + 1$. Falls hingegen $m_g = k$, so ist in (2.6)

$$\text{Im}(M - I) = \text{Ker}(DF(p_0))$$

für alle $F \in \mathcal{F}$. Daraus folgt

$$\text{Im}(M - I) = W^\perp$$

und

$$g_0(p_0) \in \text{Im}(M - I)$$

und damit wegen $g_0(p_0) \in \text{Ker}(M - I)$ auch

$$\begin{aligned} g_0(p_0) &\in \text{Im}(M - I) \cap \text{Ker}(M - I) \\ \Rightarrow \quad 1 &\leq \dim(\text{Im}(M - I) \cap \text{Ker}(M - I)) \\ \Rightarrow \quad m_a &= \dim(\text{Ker}((M - I)^n)) \\ &\geq \dim(\text{Ker}(M - I)) + 1 \\ &= m_g + 1 \\ &\geq k + 1. \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 2.3. *Wir wissen aus Satz 1.11, dass*

$$\text{Im}(D_{(p,T)}G_0(p_0, T_0, 0)) = \text{Im}(M - I) + \mathbb{R}g_0(p_0).$$

Man nennt den periodischen Orbit Γ_0 nicht-entartet, wenn

$$\text{Im}(M - I) + \mathbb{R}g_0(p_0) = \mathbb{R}^n.$$

Es ist $\text{Im}(M - I) \subset W^\perp$ und wegen (2.8) ist $g_0(p_0) \in W^\perp$. Also kann der periodische Orbit Γ_0 nur für $W = \{0\}$ nicht-entartet sein, also wenn das System dissipativ ist.

Dies motiviert uns einen ähnlichen Begriff auch für konservative Systeme einzuführen:

Definition 2.4. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition 2.2. Wir nennen die periodische Lösung $u_0(t)$ und den periodischen Orbit Γ_0 normal, wenn*

$$\text{Im}(M - I) + \mathbb{R}g_0(p_0) = W^\perp. \quad (2.9)$$

Bemerkung 2.5. (i) Insbesondere nicht-entartete Orbits sind normal, da dort $k = 0$ und $W^\perp = \mathbb{R}^n$.

(ii) Die Bedingung ist unabhängig von der Wahl von $p_0 \in \Gamma_0$, Normalität ist also eine Eigenschaft des Orbits Γ_0 .

Proposition 2.6. Es gelten die Voraussetzungen von Proposition 2.2. Der periodische Orbit Γ_0 ist genau dann normal, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

(i) $m_g = k$ oder

(ii) $m_g = k + 1$ und $g_0(p_0) \notin \text{Im}(M - I)$.

Insbesondere ist Γ_0 normal, falls $m_a = k + 1$.

Beweis. Bedingung (2.9) ist genau dann erfüllt, wenn entweder

$$\text{Im}(M - I) = W^\perp$$

oder

$$\text{codim}(\text{Im}(M - I)) = 1 \text{ in } W^\perp \quad \wedge \quad g_0(p_0) \notin \text{Im}(M - I).$$

Die erste Bedingung ist äquivalent zu $n - m_g = n - k$, also $m_g = k$. Genauso hat $\text{Im}(M - I)$ genau dann Kodimension 1 in W^\perp , wenn $m_g = k + 1$.

Als Nächstes betrachten wir den Fall, dass $m_a = k + 1$. Wegen $k \leq m_g$ ist $m_a \leq m_g + 1$ und

$$\mathbb{R}^n = \text{Im}((M - I)^2) \oplus \text{Ker}((M - I)^2)$$

mit

$$\dim(\text{Im}((M - I)^2)) = n - m_a = n - k - 1.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \text{Im}((M - I)^2) &\subset \text{Im}(M - I) \subset W^\perp \\ \wedge \quad g_0(p_0) &\in \text{Ker}(M - I) \cap W^\perp \\ &\subset \text{Ker}((M - I)^2) \cap W^\perp. \end{aligned}$$

Aus Dimensionsgründen gilt also

$$\mathbb{R}g_0(p_0) = \text{Ker}((M - I)^2) \cap W^\perp$$

und

$$\begin{aligned} W^\perp &= \text{Im}((M - I)^2) \oplus \mathbb{R}g_0(p_0) \\ &= \text{Im}(M - I) \oplus \mathbb{R}g_0(p_0), \end{aligned}$$

somit ist Γ_0 normal. □

2.2 Fortsetzung normaler periodischer Orbits

Wir stören das konservative System $\dot{u} = g_0(u)$ nun durch das Addieren eines von α abhängigen dissipativen Terms. Das folgende Lemma besagt, dass es dann nahe der periodischen Lösung u_0 nur für $\alpha = 0$ periodische Lösungen des gestörten Systems $\dot{u} = g(u, \alpha)$ geben kann.

Lemma 2.7. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition 2.2. Sei $\{F_1(p_0), \dots, F_k(p_0)\}$ eine Basis von W . Definiere für $u \in \Omega$ und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^k$ ein parameterabhängiges System*

$$g(u, \alpha) := g_0(u) + \sum_{j=1}^k \alpha_j \nabla F_j(u). \quad (2.10)$$

Sei $u(t)$ eine T -periodische Lösung von $\dot{u} = g(u, \alpha)$ mit $p := u(0)$ hinreichend nahe an p_0 . Dann ist $\alpha = 0$ und $u(t)$ ist eine T -periodische Lösung von $\dot{u} = g_0(u)$.

Beweis. Sei

$$F(u) := \sum_{j=1}^k \alpha_j F_j(u).$$

Dann ist $F \in \mathcal{F}$ und es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{u}(t) = g_0(u(t)) + \nabla F(u(t)).$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 &= F(u(T)) - F(u(0)) \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt} F(u(t)) dt \\ &= \int_0^T DF(u(t)) \cdot \dot{u}(t) dt \\ &= \int_0^T \underbrace{DF(u(t)) \cdot g_0(u(t))}_{=0} + DF(u(t)) \nabla F(u(t)) dt \\ &= \int_0^T \|\nabla F(u(t))\|^2 dt, \end{aligned}$$

also ist $\nabla F(u(t)) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\nabla F_j(p_0)$,

$j = 1, \dots, k$, sind für p hinreichend nah an p_0 auch $\nabla F_j(p)$ linear unabhängig und somit $\alpha = 0$. \square

In dissipativen Systemen sind periodische Orbits im Allgemeinen isoliert. Als Nächstes sehen wir, dass normale periodische Orbits in konservativen Systemen in Familien auftreten, deren Dimension der Anzahl der unabhängigen ersten Integrale entspricht.

Satz 2.8. *Sei Γ_0 ein normaler periodischer Orbit des konservativen Vektorfeldes g_0 wie in (2.1), W wie in (2.3) und $k = \dim W$. Dann besitzt dieses Vektorfeld lokal nahe Γ_0 eine k -Parameter-Familie normaler periodischer Orbits.*

Beweis. Existenz der k -Parameter-Familie: Wir benutzen Satz 1.12 mit

$$G_0(p, T, \alpha) := \tilde{u}(1; p, T, \alpha) - p.$$

Das heißt wir müssen zeigen, dass G_0 eine Submersion in $(p_0, T_0, 0)$ ist. Aus Satz 1.11 und der Normalität von Γ_0 wissen wir

$$\text{Im}(D_{(p,T)}G_0(p_0, T_0, 0)) = \text{Im}(M - I) + \mathbb{R}g_0(p_0) = W^\perp.$$

Wir zeigen, dass für $\beta \in \mathbb{R}^k$ gilt:

$$D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0) \cdot \beta \in W^\perp \Rightarrow \beta = 0.$$

Dann ist $\text{Im}(D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0))$ ein k -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n , der komplementär zu W^\perp ist, also muss

$$\text{Im}(D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0)) = W$$

sein. Dann ist $DG_0(p_0, T_0, 0)$ surjektiv.

Sei also $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T \in \mathbb{R}^k$ fest mit

$$D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0) \cdot \beta \in W^\perp.$$

Sei $\{\nabla F_1(p_0), \dots, \nabla F_k(p_0)\}$ eine Basis von W . Setze

$$F(u) := \sum_{j=1}^k \beta_j F_j(u).$$

Es ist

$$\begin{aligned} D_\alpha g(u, \alpha) &= \underbrace{D_\alpha g_0(u)}_{=0} + D_\alpha \sum_{j=1}^k \alpha_j F_j(u) \\ &= (\nabla F_1(u), \dots, \nabla F_k(u)) \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} D_\alpha g(u_0(s), 0) \cdot \beta &= (\nabla F_1(u_0(s)), \dots, \nabla F_k(u_0(s))) \cdot \beta \\ &= \sum_{j=1}^k \beta_j \nabla F_j(u_0(s)) \\ &= \nabla F(u_0(s)). \end{aligned}$$

Außerdem ist nach Definition $\nabla F(p_0) \in W$. Mit der Darstellung von $D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0)$ aus Satz 1.11 und $D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0) \cdot \beta \in W^\perp$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= DF(p_0) \cdot D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0) \cdot \beta \\ &= DF(p_0) \cdot T_0 M \int_0^1 V(s)^{-1} D_\alpha g(u_0(s), 0) ds \cdot \beta \\ &= T_0 DF(p_0) M \int_0^1 V(s)^{-1} \nabla F(u_0(s)) ds. \end{aligned}$$

Wegen (2.5), (2.6) und $DF(p_0)M = DF(p_0)$ lässt sich dies vereinfachen zu

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (DF(p_0)V(s)^{-1}) \cdot \nabla F(u_0(s)) ds \\ &= \int_0^1 DF(u_0(s)) \cdot \nabla F(u_0(s)) ds \\ &= \int_0^1 \|\nabla F(u_0(s))\|^2 ds. \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle $s \in [0, 1]$

$$0 = \nabla F(u_0(s))$$

und insbesondere für $s = 0$

$$0 = \nabla F(p_0) = \sum_{j=1}^k \beta_j \nabla F_j(p_0).$$

Die lineare Unabhängigkeit der $\nabla F_j(p_0)$, $1 \leq j \leq k$, liefert $\beta = 0$.

Damit ist $\text{Im}(DG_0(p_0, T_0, 0)) = W \cup W^\perp = \mathbb{R}^n$, also ist G_0 eine Submersion in $(p_0, T_0, 0)$.

Für

$$G(p, T, \alpha) := \begin{pmatrix} G_0(p, T, \alpha) \\ \langle g_0(p_0), p - p_0 \rangle \end{pmatrix}$$

folgt mit Satz 1.12, dass die Lösungsmenge von $G(p, T, \alpha) = 0$ nahe $(p_0, T_0, 0)$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ bildet.

Für alle (p, T, α) auf dieser Untermannigfaltigkeit ist p der Anfangspunkt einer T -periodischen Lösung von $\dot{u} = g(u, \alpha)$. Lokal nahe Γ_0 und damit insbesondere für p hinreichend nah an p_0 folgt mit Lemma 2.7 $\alpha = 0$, somit ist p Anfangspunkt einer T -periodischen Lösung der konservativen Gleichung $\dot{u} = g_0(u)$. Da

$$\Sigma = \{\tilde{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle g_0(p_0), \tilde{p} - p_0 \rangle\}$$

ein Poincaréschnitt des Systems bei p_0 (vgl. Definition 1.14) und $p \in \Sigma$ erhalten wir mit Folgerung 1.17 eine k -Parameter-Familie geometrisch verschiedener periodischer Orbits des Vektorfelds g_0 .

Normalität der k -Parameter-Familie: Solange (p, T) hinreichend nah an (p_0, T_0) , ist die zugehörige periodische Lösung normal:

Wir haben gezeigt, dass sich die Familie periodischer Lösungen durch $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ offen mit $0 \in \Lambda$, parametrisieren lässt und dass $\alpha = 0$ ist. Mit einer geeigneten Wahl von $\lambda \in \Lambda$ erhalten wir also glatte Funktionen $p^* : \Lambda \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^n$ und $T^* : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p^*(0) = p_0$ und $T^*(0) = T_0$, sodass $G(p^*(\lambda), T^*(\lambda), 0) = 0$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Für jedes $\lambda \in \Lambda$ gibt es eine Monodromiematrix

$$M_\lambda = \frac{\partial}{\partial p^*(\lambda)} \tilde{u}(1; p^*(\lambda), T^*(\lambda), 0),$$

die für $\|\lambda\|$ hinreichend klein wie $M = M_0$ den Eigenwert 1 besitzt. Für den Unterraum

$$W_\lambda = \{\nabla F(p^*(\lambda)) \mid F \in \mathcal{F}\}$$

gilt nach Proposition 2.2

$$\text{Im}(M_\lambda - I) + \mathbb{R}g_0(p^*(\lambda)) \subset W_\lambda^\perp. \quad (2.11)$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt

$$\begin{aligned} n - k &= \dim(\text{Im}(M_0 - I) + \mathbb{R}g_0(p_0)) \\ &\leq \dim(\text{Im}(M_\lambda - I) + \mathbb{R}g_0(p^*(\lambda))). \end{aligned}$$

Außerdem sind $\nabla F_j(p^*(\lambda)) \in W_\lambda$ mit $1 \leq j \leq k$ linear unabhängig für kleine λ , deshalb ist

$$\dim(W_\lambda^\perp) \leq n - k.$$

Daraus folgt mit (2.11)

$$\operatorname{Im}(M_\lambda - I) + \mathbb{R}g_0(p^*(\lambda)) = W_\lambda^\perp,$$

das heißt $p^*(\lambda)$ erzeugt einen normalen periodischen Orbit. \square

Für $k = \dim W = 1$ und $m_g = 1$ lässt sich die Untermannigfaltigkeit der Lösungen durch T parametrisieren:

Proposition 2.9. *Sei $p_0 \in \Omega$ ein Punkt auf einem periodischen Orbit Γ_0 des konservativen Vektorfelds g_0 mit minimaler Periode $T_0 > 0$, $\dim W = 1$ und $m_g = 1$. Dann gibt es eine Umgebung U von T_0 und eine glatte Abbildung $p^* : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^n$ mit $p^*(T_0) = p_0$, sodass für alle $T \in U$ der Punkt $p^*(T)$ einen T -periodischen Orbit Γ_T von g_0 erzeugt.*

Beweis. Da $m_g = k = 1$, ist der periodische Orbit nach Proposition 2.6 normal. Insbesondere gilt $\operatorname{Im}(M - I) = W^\perp$ und $\operatorname{Ker}(M - I) = \mathbb{R}g_0(p_0)$. Nach Satz 2.8 mit $k = 1$ gibt es nahe Γ_0 eine 1-Parameter-Familie normaler periodischer Orbits von g_0 . Damit reicht es zu zeigen, dass die Gleichungen

$$G_0(p, T, \alpha) = 0 \wedge \langle g_0(p_0), p - p_0 \rangle = 0$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ nach (p, α) als Funktion von T aufgelöst werden können. Wir wenden dafür wieder Satz 1.6 an:

Es sei wieder $G_0(p_0, T_0, 0) := \tilde{u}(1; p, T, \alpha) - p = 0$. Wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} D_{(p,\alpha)}G_0(p_0, T_0, 0) \cdot (q, \beta) &= (M - I)q + D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0)\beta = 0 \\ \wedge \langle g_0(p_0), q \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

nur für $(q, \beta) = 0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ gelten kann. Aus Satz 1.11 und (2.4) folgt

$$D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0) \cdot \beta = -(M - I)q \in W^\perp$$

und im Beweis von Satz 2.8 wurde hierfür $\beta = 0$ gezeigt. Dann ist

$$q \in \operatorname{Ker}(M - I) = \mathbb{R}g_0(p_0)$$

und die zweite Gleichung von (2.12) liefert damit $q = 0$.

Also ist $D_{(p,\alpha)}G_0(p_0, T_0, 0)$ invertierbar und man kann (p, T, α) nahe $(p_0, T_0, 0)$ nach T auflösen. \square

Lemma 2.10. *Auch wenn $k > 1$ und $m_g = k$ können wir T als einen der Parameter der k -Parameter-Familie periodischer Orbits aus Satz 2.8 nutzen: Für $m_g = k$ ist*

$$D_T G_0(p_0, T_0, 0) = g_0(p_0) \in W^\perp = \operatorname{Im}(M - I) = \operatorname{Im}(D_p G_0(p_0, T_0, 0)),$$

also ist die Variable T nicht notwendig, damit G_0 eine Submersion in $(p_0, T_0, 0)$ ist.

Dies funktioniert nicht für $m_g = k + 1$ und $g_0(p_0) \notin \text{Im}(M - I)$. Dies ist nach Proposition 2.6 die andere Alternative, wenn Γ_0 normal. Bezeichne die Lösungen von $G(p, T, \alpha)$ mit $(p^*(\lambda), T^*(\lambda), 0)$ mit $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= D_\lambda G_0(p^*(\lambda), T^*(\lambda), 0)_{\lambda=0} \\ &= (M - I)Dp^*(0) + g_0(p_0)DT^*(0) \\ \Rightarrow 0 &= DT^*(0), \text{ da } g_0(p_0) \notin \text{Im}(M - I). \end{aligned}$$

3 Hamiltonsche Systeme und ihre Symmetrien

Autonome Hamiltonsche Systeme sind konservative Systeme, deren erste Integrale sogenannten „Symmetrien“ des Systems entsprechen. Um diese Symmetrien für die Fortsetzung periodischer Orbits ausnutzen zu können, werden wir in diesem Kapitel die dafür relevanten Eigenschaften Hamiltonscher Systeme und ihrer Symmetrien kennenlernen. Wir gehen dabei gemäß [MFG⁺03], Abschnitt 4, vor.

Definition 3.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Hamiltonsches System ist ein System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = \nabla_y H, \quad \dot{y} = -\nabla_x H,$$

wobei $H = H(t, x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. H heißt Hamiltonfunktion.

Im Folgenden werden wir nur Hamiltonsche Systeme betrachten, in denen die Hamiltonfunktion H unabhängig von der Variable t ist.

Beispiel 3.2 (Das N -Körper-Problem). (Vgl. [MHO09]) Betrachte N Massepunkte im \mathbb{R}^3 , auf die nur die gegenseitige Gravitation wirkt. Sei $x_i \in \mathbb{R}^3$ der Ortsvektor, $y_i \in \mathbb{R}^3$ der Impulsvektor und m_i die Masse des i -ten Massepunktes. Dann ergibt sich aus dem zweiten Newtonschen Gesetz und dem Gravitationsgesetz die Hamiltonfunktion

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\|y_i\|^2}{2m_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{Gm_i m_j}{\|x_i - x_j\|},$$

wobei G die Gravitationskonstante ist.

Dieses Hamiltonsche System besitzt $k = 10$ erste Integrale: Die Hamiltonfunktion $H(u)$, die drei Komponenten des Gesamtimpulses

$$P(u) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^N y_i,$$

die drei Komponenten des Gesamtdrehimpulses

$$L(u) = \sum_{i=1}^N m_i x_i \times y_i$$

und die drei Komponenten des Massezentrums zum Zeitpunkt $t = 0$

$$M(u) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N m_i} \sum_{i=1}^N m_i x_i.$$

Letztere entfallen, wenn man das Massezentrum zum Zeitpunkt $t = 0$ in den Ursprung setzt. Dann ist $k = 7$.

3.1 Notationen

Wir werden nun einige Notationen einführen, die uns das Rechnen in diesen Systemen vereinfachen und die wir für die Fortsetzung periodischer Orbits nutzen werden.

Betrachte den $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ mit Elementen

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und dem Standard-Skalarprodukt $\langle u, \tilde{u} \rangle = \sum_{j=1}^{2n} u_j \tilde{u}_j$. Sei außerdem $J \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$ die *symplektische Standardmatrix*, definiert durch

$$J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

das heißt

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

J ist antisymmetrisch, also $J^T = -J$, und es ist $J^2 = -I$. Eine Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$ heißt *symplektisch*, falls

$$A^T J A = J.$$

Eine *symplektische Form* ist eine antisymmetrische und nicht-ausgeartete Bilinearform. Die *symplektische Standardform* $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ist für $u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^{2n}$ definiert durch

$$\omega(u, \tilde{u}) := \langle u, J\tilde{u} \rangle.$$

Der Vektorraum \mathbb{R}^{2n} zusammen mit der Standard-symplektischen Form ist ein *symplektischer Vektorraum*.

Definition 3.3. Sei $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ glatt. Dann ist das zugehörige Hamiltonsche Vek-

torfeld $X_H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ für $u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^{2n}$ definiert durch

$$DH(u) \cdot \tilde{u} = \omega(X_H(u), \tilde{u}) \quad (3.1)$$

bzw. äquivalent dazu durch

$$X_H(u) = J\nabla H(u).$$

Wir nennen

$$\dot{u} = X_H(u) \quad (3.2)$$

die Hamiltonsche Gleichung mit Hamiltonfunktion H .

Diese Systeme sind konservativ, da die Hamiltonfunktion H selbst ein erstes Integral von X_H ist: Für alle $u \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt

$$DH(u) \cdot X_H(u) = \omega(X_H(u), X_H(u)) = 0.$$

Definition 3.4. (i) Ein symplektischer Diffeomorphismus ist ein Diffeomorphismus $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, sodass für alle $u, \bar{u}, \tilde{u} \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt

$$\omega(D\psi(u) \cdot \bar{u}, D\psi(u) \cdot \tilde{u}) = \omega(\bar{u}, \tilde{u}). \quad (3.3)$$

(ii) Eine Symmetrie von (3.2) ist ein symplektischer Diffeomorphismus $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, unter dem die Hamiltonfunktion invariant ist, für den also

$$H(\psi(u)) = H(u)$$

für alle $u \in \mathbb{R}^{2n}$.

(iii) Seien $F, H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Dann heißt die glatte Funktion $\{F, H\} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\{F, H\}(u) := DF(u) \cdot X_H(u) = \omega(X_F(u), X_H(u))$$

für $u \in \mathbb{R}^{2n}$ Poissonklammer von F und H .

3.2 Das Noethertheorem

Satz 3.5. Seien $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ und $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei glatte Funktionen und seien $\phi_H(t, u) = \phi_H^t(u)$ und $\phi_F(s, u) = \phi_F^s(u)$ für $t, s \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}^{2n}$, die Flüsse der zugehörigen hamiltonschen Gleichungen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\{F, H\} \equiv 0$
- (ii) F ist ein erstes Integral für das Hamiltonsche Vektorfeld X_H
- (iii) H ist ein erstes Integral für das Hamiltonsche Vektorfeld X_F
- (iv) ϕ_F^s ist für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine Symmetrie von X_H
- (v) ϕ_H^t ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Symmetrie von X_F .

Außerdem folgt aus jeder dieser Eigenschaften

- (vi) die Flüsse von X_H und X_F kommutieren, das heißt für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt

$$\phi_H^t(\phi_F^s(u)) = \phi_F^s(\phi_H^t(u)).$$

Unter der Bedingung, dass X_F oder X_H mindestens einen beschränkten Orbit hat, gilt auch die Umkehrung: Aus (vi) folgt jede der Eigenschaften (i)-(v).

Beweis. Differentiation von (3.1) nach u liefert

$$\begin{aligned} \text{Hess}(H(u)) \cdot \tilde{u} &= \nabla \omega(X_H(u), \tilde{u}) \\ &= \nabla(X_H(u)^T J \tilde{u}) \\ &= (\nabla(X_H(u)^T)) J \tilde{u} \\ &= (DX_H(u))^T J \tilde{u}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{u}^T \text{Hess}(H(u)) \tilde{u} &= \bar{u}^T (DX_H(u))^T J \tilde{u} \\ &= (DX_H(u) \bar{u})^T J \tilde{u} \\ &= \omega(DX_H(u) \bar{u}, \tilde{u}) \end{aligned}$$

und wegen der Symmetrie von $\text{Hess}(H(u))$ gilt für alle $u, \bar{u}, \tilde{u} \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned} \bar{u}^T \text{Hess}(H(u)) \tilde{u} &= \tilde{u}^T \text{Hess}(H(u)) \bar{u} \\ \Rightarrow \omega(DX_H(u) \bar{u}, \tilde{u}) &= \omega(DX_H(u) \tilde{u}, \bar{u}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Außerdem ist der Diffeomorphismus $\psi(u) := \phi_H^t(u)$ symplektisch für alle $t \in \mathbb{R}$:
 Für alle $u, \bar{u} \in \mathbb{R}^{2n}$ ist $v(t) := D\phi_H^t(u)\bar{u}$ eine Lösung der Variationsgleichung (vgl. Proposition 1.8)

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= D \frac{\partial}{\partial t} \phi_H^t(u) \bar{u} \\ &= D(X_H(\phi_H^t(u))) \bar{u} \\ &= DX_H(\phi_H^t(u))v(t). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \omega(D\phi_H^t(u)\bar{u}, D\phi_H^t(u)\tilde{u}) \\ &= \omega(DX_H(\phi_H^t(u))D\phi_H^t(u)\bar{u}, D\phi_H^t(u)\tilde{u}) + \omega(D\phi_H^t(u)\bar{u}, DX_H(\phi_H^t(u))D\phi_H^t(u)\tilde{u}) \\ &= \omega(DX_H(\phi_H^t(u))D\phi_H^t(u)\bar{u}, D\phi_H^t(u)\tilde{u}) - \omega(DX_H(\phi_H^t(u))D\phi_H^t(u)\tilde{u}, D\phi_H^t(u)\bar{u}) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} 0 \end{aligned}$$

und daraus folgt für alle $u, \bar{u}, \tilde{u} \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\omega(\bar{u}, \tilde{u}) = \omega(D\phi_H^t(u)\bar{u}, D\phi_H^t(u)\tilde{u}).$$

Damit ist $\phi_H^t(u)$ ein symplektischer Diffeomorphismus.

(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) gilt nach Definition der Poissonklammer und des ersten Integrals.

(iii) \Leftrightarrow (v): Es gilt für alle $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned} F(u) &= F(\phi_H^t(u)) \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial}{\partial t} F(\phi_H(t, u)) \\ &= DF(\phi_H^t(u)) \cdot \dot{\phi}_H^t(u) \\ &= DF(\phi_H^t(u)) \cdot X_H(\phi_H^t(u)) \\ \Leftrightarrow 0 &= DF(u) \cdot X_H(u) = \{F, H\}. \end{aligned}$$

(ii) \Leftrightarrow (iv): analog zu (iii) \Leftrightarrow (v).

(iv) \Rightarrow (vi): Sei ψ eine Symmetrie von H . Differentiation von $H(u) = H(\psi(u))$ nach

u und Berücksichtigung von (3.1) und (3.3) liefert uns für alle $u \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned}
 DH(u)\bar{u} &= DH(\psi(u))D\psi(u)\bar{u} \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^{2n} \\
 \Leftrightarrow \omega(X_H(u), \bar{u}) &= \omega(X_H(\psi(u)), D\psi(u)\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^{2n} \\
 \Leftrightarrow \omega(X_H(u), \bar{u}) &= \omega(D\psi(u)^{-1}X_H(\psi(u)), \bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^{2n} \\
 \Leftrightarrow X_H(u) &= D\psi(u)^{-1}X_H(\psi(u)) \\
 \Leftrightarrow D\psi(u)X_H(u) &= X_H(\psi(u))
 \end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere, dass der Fluss ϕ_H^t von (3.2) mit ψ kommutiert:

$$\begin{aligned}
 X_H(\psi(\phi_H^t(u))) &= D\psi(\phi_H^t(u))X_H(\phi_H^t(u)) \\
 &= D\psi(\phi_H^t(u))\dot{\phi}_H^t(u) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t}\psi(\phi_H^t(u))
 \end{aligned}$$

Also ist $\psi(\phi_H(t, u))$ die Lösung der Hamiltonschen Gleichung $\dot{u} = X_H(u)$ zum Anfangswert

$$\psi(\phi_H^0(u)) = \psi(u).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\phi_H^t(\psi(u)) = \psi(\phi_H^t(u))$$

und insbesondere für den symplektischen Diffeomorphismus $\psi = \phi_F^s$, $s \in \mathbb{R}$, gilt

$$\phi_H^t(\phi_F^s(u)) = \phi_F^s(\phi_H^t(u)).$$

(vi) \Rightarrow (v): Differentiation von $\phi_F^s(\phi_H^t(u)) = \phi_H^t(\phi_F^s(u))$ nach t in $t = 0$ liefert für alle $u \in \mathbb{R}^{2n}$

$$D\phi_F^s(u)X_H(u) = X_H(\phi_F^s(u)).$$

Diese Gleichung differenziert nach s in $s = 0$ ergibt

$$DX_F(u)X_H(u) = DX_H(u)X_F(u).$$

Und daraus folgt mit $-J = J^T$

$$\begin{aligned} 0 &= DX_F(u)X_H(u) - DX_H(u)X_F(u) \\ &= DJ\nabla F(u)X_H(u) - DJ\nabla H(u)X_F(u) \\ \Rightarrow 0 &= D\nabla F(u)X_H(u) - D\nabla H(u)J\nabla F(u) \\ &= D\nabla F(u)X_H(u) + D\nabla H(u)J^T\nabla F(u) \\ &= \nabla(\nabla F(u))^T X_H(u) + \nabla(X_H(u))^T \nabla F(u) \\ &= \nabla(DF(u)X_H(u)). \end{aligned}$$

Also ist $DF(u)X_H(u)$ konstant für alle $u \in \mathbb{R}^{2n}$. □

Bemerkung 3.6. Die Folgerungen (iv) \Rightarrow (ii) und (iv) \Rightarrow (iii) sind auch unter dem Namen Noethertheorem bekannt.

4 Fortsetzung periodischer Orbits in Hamiltonschen Systemen

In diesem Kapitel werden mit Hilfe der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Eigenschaften symmetrischer Hamiltonscher Systeme Bedingungen aufstellen um die k -dimensionale Lösungsmannigfaltigkeit aus Satz 2.8 auf einen eindimensionalen Zweig periodischer Orbits zu reduzieren.

Es gibt viele Möglichkeiten diese zusätzlichen Bedingungen aufzustellen. In Hamiltonschen Systemen kann man auf „natürliche“ Art einen eindimensionalen Unterzweig periodischer Orbits auswählen, der sich direkt numerisch berechnen lässt und der die komplette Mannigfaltigkeit periodischer Orbits mit Hilfe der Symmetrien erzeugt. Die Resultate dieses Kapitels stammen aus [MFG⁺03], Abschnitt 5.

4.1 Reduktion der Lösungsmannigfaltigkeit durch Symmetrien

Wir betrachten ein Hamiltonsches Vektorfeld X_H mit $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$. Nach Satz 3.5 hat der Raum \mathcal{F} der ersten Integrale von X_H die Form

$$\mathcal{F} := \{F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}) \mid \{F, H\} \equiv 0\}.$$

Insbesondere ist $H \in \mathcal{F}$.

Proposition 4.1. *Sei $p_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ Anfangspunkt eines nicht-trivialen periodischen Orbits Γ_0 des Hamiltonschen Systems $\dot{u} = X_H(u)$ mit minimaler Periode $T_0 > 0$. Sei ϕ_H^t der Fluss des Systems. Sei*

$$V(t) = D\phi_H^{T_0 t}(p_0)$$

die Fundamentalmatrix der Variationsgleichung (vgl. Proposition 1.8) und sei

$$M = D\phi_H^{T_0}(p_0)$$

die Monodromiematrix mit $m_g = \dim \text{Ker}(M - I)$ die Vielfachheit des Multiplikators 1. Sei

$$W := \{\nabla F(p_0) \mid F \in \mathcal{F}\}$$

und $k := \dim W$. Seien $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}$, sodass $\{\nabla F_1(p_0), \dots, \nabla F_k(p_0)\}$ eine Basis von W ist, wobei $F_1 := H$. Dann gilt

- (i) die Monodromiematrix M ist symplektisch und
- (ii) $JW \subset \text{Ker}(M - I)$ und $m_g \geq k$.

Beweis. (i) Da $\phi_H^{T_0}$ ein symplektischer Diffeomorphismus ist, gilt für die Monodromiematrix $M = D\phi_H^{T_0}(p_0)$

$$\begin{aligned} \omega(Mu, M\tilde{u}) &= \omega(u, \tilde{u}) \\ \Rightarrow \langle Mu, JM\tilde{u} \rangle &= \langle u, J\tilde{u} \rangle \\ \Rightarrow u^T M^T JM\tilde{u} &= u^T J\tilde{u} \end{aligned}$$

für alle $u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^{2n}$, also ist M symplektisch.

- (ii) Für alle $F \in \mathcal{F}$ ist nach Satz 3.5 der Fluss ϕ_F^s des Hamiltonschen Vektorfelds X_F für alle $s \in \mathbb{R}$ eine Symmetrie von X_H . Mit $\phi_H^{T_0}(p_0) = p_0$ folgt daraus

$$\phi_H^{T_0}(\phi_F^s(p_0)) = \phi_F^s(\phi_H^{T_0}(p_0)) = \phi_F^s(p_0) \quad (4.1)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Das heißt die Abbildung $t \mapsto \phi_H^t(\phi_F^s(p_0))$ stellt für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine T_0 -periodische Lösung der Hamiltonschen Gleichung $\dot{u} = X_H(u)$ dar. Differentiation von (4.1) nach s an der Stelle $s = 0$ ergibt

$$D\phi_H^{T_0}(\phi_F^0(p_0))X_F(\phi_F^0(p_0)) = X_F(\phi_F^0(p_0))$$

und mit $\phi_F^0(p_0) = p_0$ und $M = D\phi_H^{T_0}(p_0)$ erhalten wir daraus

$$MX_F(p_0) = X_F(p_0).$$

Also ist für alle ersten Integrale $F \in \mathcal{F}$

$$X_F(p_0) \in \text{Ker}(M - I).$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$JW \subset \text{Ker}(M - I)$$

und insbesondere $m_g \geq k$. □

Wir zeigen nun, dass man aus der k -Parameter-Fortsetzung eines normalen periodischen Orbits der Hamiltonschen Gleichung $\dot{u} = X_H(u)$ auf natürliche Weise eine 1-Parameter-Teilfamilie auswählen kann, die die vollständige k -Parameter-Familie mit Hilfe der Symmetrien erzeugt.

Satz 4.2. Sei $\Gamma_0 = \{\phi_H^t(p_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ein normaler T_0 -periodischer Orbit von $\dot{u} = X_H(u)$ mit W , k und $\{F_1, \dots, F_k\}$ wie in Proposition 4.1. Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \mathbb{R}^k$ sei eine gestörte Gleichung gegeben durch

$$g(u, \alpha) := X_H(u) + \sum_{j=1}^k \alpha_j \nabla F_j(u).$$

Bezeichne den Fluss von $\dot{u} = Tg(u, \alpha)$ mit $\tilde{u}(t; p, T, \alpha)$ und setze

$$G_0(p, T, \alpha) := \tilde{u}(1; p, T, \alpha) - p$$

für $(p, T, \alpha) \in \mathbb{R}^{2n} \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^k$. Dann besteht die Lösungsmenge der Gleichungen

$$\begin{aligned} G_0(p, T, \alpha) &= 0, \\ \langle X_{F_j}(p_0), p - p_0 \rangle &= 0, \quad 1 \leq j \leq k \end{aligned} \tag{4.2}$$

nahe $(p_0, T_0, 0)$ aus einer glatten eindimensionalen Kurve

$$\{(p(\lambda), T(\lambda), 0) \mid \lambda \in U\},$$

wobei $U \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von 0 ist. Falls $m_g = k$ ist, kann diese Kurve durch die Periode T parametrisiert werden.

Die Projektion der Kurve auf den Phasenraum \mathbb{R}^{2n} und die Anwendung der Flüsse der Hamiltonschen Vektorfelder X_{F_1}, \dots, X_{F_k} auf die Projektion erzeugt die $(k+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

$$\{\phi_{F_k}^{s_k} \circ \dots \circ \phi_{F_2}^{s_2} \circ \phi_H^{s_1}(p(\lambda)) \mid s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}, \lambda \in U\},$$

die invariant unter dem Fluss von X_H ist und durch eine k -Parameter-Familie normaler periodischer Orbits von $\dot{u} = X_H(u)$ gefasert wird.

Beweis. Im Beweis von Satz 2.8 haben wir bereits gezeigt, dass G_0 eine Submersion in $(p_0, T_0, 0)$ ist, und aus Lemma 2.7 wissen wir, dass $\alpha = 0$ entlang jedes Lösungszweigs von $G_0(p, T, \alpha) = 0$. Außerdem wissen wir aus Satz 1.11

$$\text{Ker}(M - I) \times \{0\} \times \{0\} \subset \text{Ker}(DG_0(p_0, T_0, 0)).$$

Die Phasenbedingungen in (4.2) haben die Form

$$A \begin{pmatrix} p - p_0 \\ T - T_0 \\ \alpha \end{pmatrix} = 0 \tag{4.3}$$

mit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^k)$ gegeben durch

$$A \begin{pmatrix} p \\ T \\ \alpha \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \langle X_{F_1}(p_0), p \rangle \\ \vdots \\ \langle X_{F_k}(p_0), p \rangle \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Um mit Hilfe von Folgerung 1.7 die Existenz der eindimensionalen Lösungskurve zu erhalten, müssen wir zeigen, dass

$$A(\text{Ker}(DG_0(p_0, T_0, 0))) = \mathbb{R}^k. \quad (4.5)$$

Es ist $\dim(JW) = k$ und aus Proposition 4.1 (ii) wissen wir

$$JW \subset \text{Ker}(M - I).$$

Wir werden zeigen, dass die Einschränkung von A auf $JW \times \{0\} \times \{0\}$ injektiv ist. Dann ist sie aus Dimensionsgründen auch surjektiv.

Sei also $F \in \mathcal{F}$ und nehme an, dass

$$A \begin{pmatrix} X_F(p_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Mit $X_F(p_0) = \sum_{j=1}^k \beta_j X_{F_j}(p_0)$ für gewisse $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} \langle X_{F_1}(p_0), X_F(p_0) \rangle \\ \vdots \\ \langle X_{F_k}(p_0), X_F(p_0) \rangle \end{pmatrix} \\ \Rightarrow 0 &= \sum_{j=1}^k \beta_j \langle X_{F_i}(p_0), X_{F_j}(p_0) \rangle \text{ für } 1 \leq i \leq k \\ \Rightarrow 0 &= \sum_{i,j=1}^k \beta_i \beta_j \langle X_{F_i}(p_0), X_{F_j}(p_0) \rangle \\ &= \langle X_F(p_0), X_F(p_0) \rangle = \|X_F(p_0)\|^2 \\ \Rightarrow 0 &= X_F(p_0). \end{aligned}$$

Also ist A eingeschränkt auf $JW \times \{0\} \times \{0\}$ injektiv und wegen $\dim JW = k = \dim \mathbb{R}^k$ auch surjektiv.

Dann ist die Lösungsmenge von (4.2) lokal bei $(p_0, T_0, 0)$ eine glatte eindimensionale Kurve $\{(p(\lambda), T(\lambda), 0) \mid \lambda \in U\}$ für eine offene Umgebung U von 0. Nach Lemma 2.10 kann diese Kurve durch T parametrisiert werden, falls $m_g = k$.

Projektion der Kurve auf den Phasenraum \mathbb{R}^{2n} und die Anwendung der Flüsse der Hamiltonschen Vektorfelder X_{F_1}, \dots, X_{F_k} liefert die $(k+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{M} = \{\phi_{F_k}^{s_k} \circ \dots \circ \phi_{F_2}^{s_2} \circ \phi_H^{s_1}(p(\lambda)) \mid s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}, \lambda \in U\}.$$

\mathcal{M} ist invariant unter dem Fluss von X_H , da ϕ_H^t mit $\phi_{F_j}^{s_j}$, $j = 1, \dots, k$, kommutiert:

$$\begin{aligned} & \phi_H^t(\phi_{F_k}^{s_k} \circ \dots \circ \phi_{F_2}^{s_2} \circ \phi_H^{s_1}(p(\lambda))) \\ &= \phi_{F_k}^{s_k} \circ \dots \circ \phi_{F_2}^{s_2} \circ \phi_H^{s_1+t}(p(\lambda)) \in M \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in U$. \mathcal{M} wird für $\lambda \in U$ durch die k -Parameter-Familie

$$\mathcal{M}_\lambda := \{\phi_{F_k}^{s_k} \circ \dots \circ \phi_{F_2}^{s_2} \circ \phi_H^{s_1}(p(\lambda)) \mid s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}\}$$

normaler $T(\lambda)$ -periodischer Orbits von $\dot{u} = X_H(u)$ gefasert. \square

4.2 Systeme mit Skalierungseigenschaft

Definition 4.3. Das Hamiltonsche Vektorfeld X_H erfüllt eine Skalierungseigenschaft genau dann, wenn es eine glatte Abbildung

$$S : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}), \quad c \mapsto S_c$$

gibt, sodass

- (i) S_c invertierbar für alle $c > 0$,
- (ii) $S_1 = I$ und
- (iii) für $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ und $c > 0$ gilt

$$\phi_H^{ct}(S_c u) = S_c \phi_H^t(u) \tag{4.6}$$

bzw. äquivalent dazu

$$cX_H(S_c u) = S_c X_H(u).$$

Die Matrix S_c nennt man Skalierungsmatrix.

Beispiel 4.4 (Das Dreikörperproblem). (Vgl. Beispiel 3.2) Die Hamiltonfunktion ist gegeben durch

$$H(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \sum_{i=1}^3 \frac{\|y_i\|^2}{2m_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{Gm_i m_j}{\|x_i - x_j\|},$$

wobei $x_i \in \mathbb{R}^3$ der Ortsvektor, $y_i \in \mathbb{R}^3$ der Impulsvektor und m_i die Masse des i -ten Massepunktes für $i = 1, 2, 3$. Die Gravitationskonstante G setzen wir gleich 1. Die Hamiltonsche Gleichung mit Hamiltonfunktion H lautet

$$\dot{u} = X_H(u) = \begin{pmatrix} y_1/m_1 \\ y_2/m_2 \\ y_3/m_3 \\ -m_1m_2 \frac{x_1-x_2}{\|x_1-x_2\|^3} - m_1m_3 \frac{x_1-x_3}{\|x_1-x_3\|^3} \\ -m_1m_2 \frac{x_2-x_1}{\|x_1-x_2\|^3} - m_2m_3 \frac{x_2-x_3}{\|x_2-x_3\|^3} \\ -m_1m_3 \frac{x_3-x_1}{\|x_1-x_3\|^3} - m_2m_3 \frac{x_3-x_2}{\|x_2-x_3\|^3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{18}$$

X_H erfüllt die Skalierungseigenschaft mit

$$S_c := \begin{pmatrix} c^{2/3}I_9 & 0 \\ 0 & c^{-1/3}I_9 \end{pmatrix} :$$

Es ist für $i = 1, 2, 3$

$$c(c^{-1/3}y_i/m_i) = c^{2/3}y_i/m_i$$

und für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ paarweise verschieden

$$\begin{aligned} & c \left(\frac{c^{2/3}}{c^2} \left(-m_i m_j \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3} - m_i m_k \frac{x_i - x_k}{\|x_i - x_k\|^3} \right) \right) \\ &= c^{-1/3} \left(-m_i m_j \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3} - m_i m_k \frac{x_i - x_k}{\|x_i - x_k\|^3} \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle $u \in \mathbb{R}^{2n}$

$$cX_H(S_c u) = S_c X_H(u).$$

Folgerung 4.5. Das Hamiltonsche Vektorfeld X_H erfülle eine Skalierungseigenschaft mit Skalierungsmatrix S_c und sei $k \geq 2$. Sei Γ_0 ein normaler periodischer Orbit wie in Satz 4.2 mit Periode T_0 , Anfangspunkt p_0 und Monodromiematrix M . Dann ist $m_g = k$ und die eindimensionale Lösungskurve aus Satz 4.2 ist gegeben durch

$$\{(S_c p_0, cT_0, 0) \mid c > 0\}.$$

Beweis. Einsetzen von $u = p_0$ und $t = T_0$ in (4.6) ergibt

$$\phi_H^{cT_0}(S_c p_0) = S_c \phi_H^{T_0}(p_0) = S_c p_0,$$

also erzeugt $p_c := S_c p_0$ für jedes $c > 0$ einen periodischen Orbit $\Gamma_c := S_c(\Gamma_0)$ mit Periode $T_c := cT_0$. Dadurch erhalten wir eine eindimensionale Lösungskurve, die durch

die Periode parametrisiert werden kann:

$$\{(p_c, T_c, 0) \mid c > 0\} = \{(S_{T/T_0} p_0, T, 0) \mid T \in \mathbb{R}\}.$$

Daraus folgt $m_g = k$: Angenommen es ist $m_g \neq k$. Da Γ_0 normal ist, gilt dann nach Proposition 2.6

$$m_g = k + 1 \text{ und } X_H(p_0) \notin \text{Im}(M - I). \quad (4.7)$$

Differentiation von $G_0(p_c, T_c, 0) = 0$ nach c in $c = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= D_p G_0(p_0, T_0, 0) S'_1 p_0 + D_T G_0(p_0, T_0, 0) T_0 \\ &\stackrel{\text{Satz 1.11}}{=} (M - I) S'_1 p_0 + X_H(p_0) T_0, \end{aligned}$$

wobei S'_1 die Ableitung von S_c nach c in $c = 1$ ist. Dann muss nach (4.7) $T_0 = 0$ gelten. Differentiation von (4.6) nach u in $(t, u) = (T_0, p_0)$ liefert

$$\begin{aligned} D\phi_H^{cT_0}(S_c p_0) S_c &= S_c D\phi_H^{T_0}(p_0) \\ \Rightarrow S_c^{-1} M_c S_c &= M_0, \end{aligned}$$

wobei $M_c = D\phi_H^{T_c}(p_c)$ die Monodromiematrix der T_c -periodischen Lösung durch den Anfangspunkt p_c ist. Also ist M_c ähnlich zu M . Insbesondere gilt

$$\det M = (\det S_c)^{-1} \det M_c \det S_c = \det M_c,$$

das heißt die Multiplikatoren bleiben fest entlang des gesamten Zweigs. Außerdem ist wegen

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(M_c - I) &= \dim \text{Ker}(S_c M S_c^{-1} - I) \\ &= \dim \text{Ker}(S_c (M - I) S_c^{-1}) \\ &= \dim \text{Ker}(M - I) \\ &= k \end{aligned}$$

jeder periodische Orbit normal mit $(m_g)_c = k$, wobei $(m_g)_c = \dim \text{Ker}(M_c - I)$ die geometrischer Vielfachheit des Multiplikators 1 von M_c .

Die Orbits des Lösungszweigs $\{(p_c, T_c, 0) \mid c > 0\}$ können nicht durch Symmetrien zusammenhängen, da sie verschiedene Perioden T_c haben. Also muss dieser Zweig bis auf Phasenverschiebung, Symmetrie und Umparametrisierung dergleiche sein wie der Lösungszweig $\{(p(\lambda), T(\lambda), 0) \mid \lambda \in U\}$ in Satz 4.2. \square

Wir leiten nun eine Fortsetzungsmethode her, die einen zusätzlichen Parameter benutzt. Sie kann auf periodische Orbits Hamiltonscher Systeme angewandt werden, für die $m_g = k$ gilt, also insbesondere auf Systeme mit einer Skalierungseigenschaft.

Satz 4.6. Gegeben sei eine 1-Parameter-Familie Hamiltonscher Vektorfelder X_{H_λ} , die glatt von dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängen. Sei $\{H_\lambda, F_{\lambda,j}\} = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und gewisse Funktionen $F_{\lambda,2}, \dots, F_{\lambda,k} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$, die ebenfalls glatt von λ abhängen. $p_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ erzeuge einen periodischen Orbit $\Gamma_0 := \{\phi_{H_0}^t(p_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ von X_{H_0} mit minimaler Periode $T_0 > 0$, sd. $m_g = k$ und $\nabla F_{0,1}(p_0), \dots, \nabla F_{0,k}(p_0)$ linear unabhängig, wobei $F_{0,1} := H_0$.

Definiere

$$g(u, \lambda, \alpha) := X_{H_\lambda}(u) + \sum_{j=1}^k \alpha_j \nabla F_{\lambda,j}(u)$$

für $u \in \mathbb{R}^{2n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \mathbb{R}^k$. Sei $\tilde{u}(t; p, T, \lambda, \alpha)$ der Fluss von $\dot{u} = Tg(u, \lambda, \alpha)$ und

$$G_0(p, T, \lambda, \alpha) := \tilde{u}(1; p, T, \lambda, \alpha) - p.$$

Dann besteht die Lösungsmenge der Gleichungen

$$\begin{aligned} G_0(p, T, \lambda, \alpha) &= 0, \\ \langle X_{F_{0,j}}(p_0), p - p_0 \rangle &= 0, \quad 1 \leq j \leq k \end{aligned} \tag{4.8}$$

für jedes T nahe T_0 aus einer glatten eindimensionalen Kurve nahe $(p, \lambda, \alpha) = (p_0, 0, 0)$. Es ist $\alpha = 0$ entlang dieses Zweigs und er kann durch λ parametrisiert werden.

Beweis. Wegen $m_g = k$ ist

$$\text{Im}(M - I) = W^\perp.$$

Wie im Beweis von Satz 2.8 ist

$$D_\alpha G_0(p_0, T_0, 0, 0) = W,$$

also ist die lineare Abbildung

$$D_{(p,\alpha)} G_0(p_0, T_0, 0, 0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{2n})$$

surjektiv.

Analog zum Beweis von Satz 4.2 erhalten wir, dass die Lösungsmenge von (4.8) nahe $(p, T, \lambda, \alpha) = (p_0, T_0, 0, 0)$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, auf der $\alpha = 0$ ist und die durch (T, λ) parametrisiert werden kann. Festhalten der Periode liefert eine eindimensionale Lösungskurve, die durch λ parametrisiert werden kann. \square

Bemerkung 4.7. Im Fall des Dreikörperproblems aus Beispiel 4.4 kann man die Periode T_0 eines gegebenen normalen periodischen Orbits fixieren und zum Beispiel die Masse m_1 des ersten Körpers als Fortsetzungsparameter λ wie in Satz 4.6 verwenden.

5 Fortsetzung periodischer Orbits nahe einem Gleichgewichtspunkt

In den vergangenen Kapiteln haben wir gesehen, dass nahe einem gegebenen periodischen Orbit eines konservativen Systems eine Mannigfaltigkeit periodischer Lösungen existiert. In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes eines konservativen Systems unter gewissen Voraussetzungen eine Familie periodischer Orbits existiert.

5.1 Hopf-Verzweigungen

Dafür definieren wir zunächst einige Grundbegriffe.

Definition 5.1. Für $u \in \mathbb{R}^n$ und $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen sei durch

$$\dot{u} = g(u, \alpha)$$

ein dynamisches System definiert. Ein Punkt $p_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Gleichgewichtspunkt oder stationäre Lösung des Systems für ein $\alpha_0 \in \mathbb{R}^k$, wenn

$$g(p_0, \alpha_0) = 0.$$

Definition 5.2. (Vgl. [BCD⁺02])

(i) Für glattes $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $p_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewichtspunkt eines parameterabhängigen Systems

$$\dot{u} = g(u, \alpha) \tag{5.1}$$

an einem Parameterwert $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt (p_0, α_0) Hopf-Verzweigungspunkt oder Hopfpunkt, falls $D_u g(p_0, \alpha_0)$ ein algebraisch einfaches Paar von Eigenwerten $\pm i\omega$, $\omega > 0$, besitzt mit

$$\sigma(D_u g(p_0, \alpha_0)) \cap i\mathbb{Z} = \{\pm i\omega\}. \tag{5.2}$$

(ii) Sei (p_0, α_0) ein Hopfpunkt des Systems (5.1). Sei $\mu(\alpha)$ der in einer Umgebung von α_0 wohldefinierte Eigenwert von $D_u g(p_0, \alpha)$ mit $\mu(\alpha_0) = i\omega$. Falls

$$\frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re} \mu(\alpha_0) \neq 0.$$

nennt man (p_0, α_0) einen einfachen Hopfpunkt.

In der Literatur wird in der Definition eines Hopfpunktes manchmal Bedingung (5.2) weggelassen oder stattdessen

$$\sigma(D_u g(p_0, \alpha_0)) \cap i\mathbb{R} = \{\pm i\omega\}$$

gefordert.

Satz 5.3 (Hopf-Verzweigungstheorem). *Sei $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ l -mal stetig differenzierbar für ein $l \geq 2$ und der Ursprung $0 \in \mathbb{R}^n$ sei für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Gleichgewichtspunkt des Systems*

$$\dot{u} = g(u, \alpha). \quad (5.3)$$

Für ein $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ sei (p_0, α_0) ein einfacher Hopfpunkt.

Dann besitzt System (5.3) in einer Umgebung von $(0, \alpha_0)$ eine einparametrische Schar $\{\gamma(s) \mid 0 < s < \epsilon\}$ nicht-trivialer periodischer Orbits.

Genauer gilt: Sei $\pm i\omega$ das einfache Paar von Eigenwerten des einfachen Hopfpunktes (p_0, α_0) mit

$$\sigma(D_u g(p_0, \alpha_0)) \cap i\mathbb{Z} = \{\pm i\omega\}$$

und

$$\frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re} \mu(\alpha_0) \neq 0,$$

wobei $\mu(\alpha)$ der nahe α_0 wohldefinierte Eigenwert von $D_u g(p_0, \alpha)$ mit $\mu(0) = i\omega$. Sei $\xi = \operatorname{Re}(v)$ für einen Eigenvektor v von $D_u g(p_0, \alpha_0)$ zum Eigenwert $i\omega$ und ϕ_α^t der Fluss von (5.3). Dann existiert ein $\epsilon > 0$ und eine $(l-1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion

$$(q(\cdot), T(\cdot), \alpha(\cdot)) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

mit

$$(q(0), T(0), \alpha(0)) = (0, \frac{2\pi}{\omega}, \alpha_0),$$

sodass für jedes $s \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\Gamma_s := \{\phi_{\alpha(s)}^t(p(s)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

ein nicht-trivialer $T(s)$ -periodischer Orbit von $\dot{u} = g(u, \alpha(s))$ durch den Punkt

$$p(s) := s(\xi + q(s))$$

ist. Für $s_1 \neq s_2$ ist $\Gamma_{s_1} \neq \Gamma_{s_2}$ und in einer Umgebung von $(0, \frac{2\pi}{\omega}, \alpha_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gehört jeder nicht-triviale periodische Orbit zur Familie $\{\Gamma_s \mid s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$.

Beweis. Siehe [Ama95], Abschnitt 26, und [MM76], Abschnitt 3C. □

5.2 Das Ljapunovsche Zentrumstheorem

Satz 5.4 (Ljapunovsches Zentrumstheorem). (Vgl. [MM76], Abschnitt 3C) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ l -mal stetig differenzierbar für ein $l \geq 2$. Durch

$$\dot{u} = g_0(u) \tag{5.4}$$

sei ein konservatives dynamisches System gegeben mit erstem Integral $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, wobei F $(l+1)$ -mal stetig differenzierbar ist. Sei $p_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewichtspunkt des Systems mit $\nabla F(p_0) = 0$ und $\det \text{Hess}F(p_0) \neq 0$. Für ein $\omega > 0$ sei $i\omega$ ein einfacher Eigenwert von $Dg_0(p_0)$ mit

$$\sigma(Dg_0(p_0)) \cap i\omega\mathbb{Z} = \{\pm i\omega\}.$$

Dann besitzt das konservative System (5.4) in einer Umgebung von p_0 genau eine einparametrische Schar nicht-trivialer periodischer Orbits.

Genauer gilt: Sei ϕ^t der Fluss von (5.4). Dann existiert ein $\epsilon > 0$ und eine $(l-1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion

$$(p(\cdot), T(\cdot)) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U \times \mathbb{R}_+$$

mit

$$(p(0), T(0)) = (p_0, \frac{2\pi}{\omega}),$$

sodass für jedes $s \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\Gamma_s := \{\phi^t(p(s)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

ein nicht-trivialer $T(s)$ -periodischer Orbit von $\dot{u} = g_0(u)$ durch den Punkt $p(s) \in U$ ist. Für $s_1 \neq s_2$ ist $\Gamma_{s_1} \neq \Gamma_{s_2}$ und in einer Umgebung von $(p_0, T_0) \in U \times \mathbb{R}$ gehört jeder nicht-triviale periodische Orbit zur Familie $\{\Gamma_s \mid s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$.

Beweis. Wir verwenden Satz 5.3. Sei o.B.d.A. $p_0 = 0$ und $F(p_0) = 0$. Wie in Abschnitt 2.2 stören wir das konservative System $\dot{u} = g_0(u)$ durch das Addieren eines dissipativen Terms: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$g(u, \alpha) := g_0(u) + \alpha \nabla F(u).$$

Dann ist $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ l -mal stetig differenzierbar und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$g(0, \alpha) = g_0(0) + \alpha \nabla F(0) = 0,$$

das heißt der Ursprung ist für alle α ein Gleichgewichtspunkt des gestörten Systems

$$\dot{u} = g(u, \alpha). \tag{5.5}$$

Da $D_u g(0, 0) = Dg_0(0)$ ist $(0, 0)$ ein Hopfpunkt des Systems (5.5).

In Kapitel 2 haben wir bereits gezeigt, dass nicht-triviale periodische Orbits nahe dem trivialen periodischen Orbit

$$\sigma(Dg_0(p_0)) \cap i\omega\mathbb{Z} = \{\pm i\omega\}$$

durch p_0 nur für $\alpha = 0$ existieren können (siehe Lemma 2.7).

Um Satz 5.3 auf den Hopfpunkt $(0, 0)$ anwenden zu können, werden wir nun zeigen, dass es sich bei dem Punkt um einen einfachen Hopfpunkt handelt:

Ersetzen von u durch δu für kleines δ und Taylorentwicklung von $g_0(\delta u)$ um $\delta = 0$ liefert

$$\begin{aligned} g_0(\delta u) &= g_0(0) + \delta Dg_0(0)u + R_1(u, \delta) \\ &= \delta Au + R_1(u, \delta), \end{aligned} \tag{5.6}$$

wobei $\frac{R_1(u, \delta)}{\delta} \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$. Ebenso ergibt sich für den Gradienten des ersten Integrals

$$\begin{aligned} \nabla F(\delta u) &= \nabla F(0) + \delta D_u \nabla F(0)u + R_2(u, \delta) \\ &= \delta Su + R_2(u, \delta) \end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei $\frac{R_2(u, \delta)}{\delta} \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$. Da F ein erstes Integral von g_0 ist, gilt für alle $u \in \mathbb{R}^n$ mit (5.6) und (5.7)

$$\begin{aligned} 0 &= DF(\delta u) \cdot g_0(\delta u) \\ &= (\delta u^T S + R_2^T(u, \delta))(\delta Au + R_1(u, \delta)) \\ &= \delta^2 u^T S A u + \delta R_2^T(u, \delta) A u + \delta u^T S R_1(u, \delta) + R_2^T(u, \delta) R_1(u, \delta). \end{aligned}$$

Für $\delta \neq 0$ folgt daraus

$$0 = u^T S A u + \frac{R_2^T(u, \delta)}{\delta} A u + u^T S \frac{R_1(u, \delta)}{\delta} + \frac{R_2^T(u, \delta)}{\delta} \frac{R_1(u, \delta)}{\delta}.$$

Für $\delta \rightarrow 0$ gilt damit für alle $u \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} 0 &= u^T S A u \\ \Rightarrow 0 &= \frac{1}{2} u^T (S A + A^T S) u. \end{aligned}$$

Da $S A + A^T S$ symmetrisch ist, muss gelten

$$0 = S A + A^T S.$$

Sei $v_0 \in \mathbb{C}^n$ der normierte Eigenvektor zum einfachen Eigenwert $i\omega$ von A . Wegen $A^T S = -SA$ ist Sv_0 ein Eigenvektor von A^T zum Eigenwert $-i\omega$:

$$A^T Sv_0 = -SAv_0 = -i\omega Sv_0.$$

Ist $v_0^H = \bar{v}_0^T$ der zu v_0 adjungierte Vektor, so ist $v_0^H S$ ein linker Eigenvektor von A zum Eigenwert $i\omega$, da

$$\begin{aligned} (A^T Sv_0)^H &= (-i\omega Sv_0)^H \\ \Rightarrow v_0^H SA &= i\omega v_0^H S. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\text{Im}(A - i\omega I_n) = (v_0^H S)^\perp.$$

Da $i\omega$ ein einfacher Eigenwert ist, ist $v_0 \notin (v_0^H S)^\perp$, also gilt $v_0^H Sv_0 \neq 0$.

Sei $\mu(\alpha)$ der in einer Umgebung von 0 wohldefinierte Eigenwert von $A + \alpha S$ mit $\mu(0) = i\omega$ und $v(\alpha)$ der zugehörige Eigenvektor mit $v(0) = v_0$. Es gilt also

$$(A + \alpha S)v(\alpha) = \mu(\alpha)v(\alpha)$$

für $|\alpha|$ hinreichend klein. Differentiation nach α im Punkt 0 liefert

$$Sv_0 + Av(0) = \dot{\mu}(0)v_0 + i\omega v(0).$$

Linksmultiplikation mit $v_0^H S$ ergibt dann

$$\begin{aligned} v_0^H S^2 v_0 + v_0^H SA v(0) &= \dot{\mu}(0)v_0^H Sv_0 + i\omega v_0^H S v(0) \\ \Rightarrow v_0^H S^2 v_0 + i\omega v_0^H S v(0) &= \dot{\mu}(0)v_0^H Sv_0 + i\omega v_0^H S v(0) \\ \Rightarrow v_0^H S^2 v_0 &= \dot{\mu}(0)v_0^H Sv_0. \end{aligned}$$

Mit $v_0^H Sv_0 \neq 0$ folgt daraus

$$\dot{\mu}(0) = \frac{v_0^H S^2 v_0}{v_0^H Sv_0}.$$

Da S und S^2 reell und symmetrisch sind, sind $v_0^H Sv_0$ und $v_0^H S^2 v_0$ ebenfalls reell. Außerdem ist $v_0^H S^2 v_0 \neq 0$: Angenommen $v_0^H S^2 v_0 = 0$, dann ist

$$(Sv_0)^H (Sv_0) = 0,$$

also $Sv_0 = 0$. Wegen $\det S \neq 0$ hieße das $v_0 = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $\|v_0\| = 1$. Also ist

$$\frac{d}{d\alpha} \text{Re}(\mu(0)) = \text{Re}(\dot{\mu}(0)) = \frac{v_0^H S^2 v_0}{v_0^H Sv_0} \neq 0.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllt. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ und eine mindestens $(l - 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion

$$(q(\cdot), T(\cdot), \alpha(\cdot)) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

mit

$$(q(0), T(0), \alpha(0)) = \left(0, \frac{2\pi}{\omega}, 0\right)$$

sodass mit

$$p(s) := s(\xi + q(s)), \quad s \in (-\epsilon, \epsilon)$$

$\gamma(s) := \gamma(p(s))$ für $0 < |s| < \epsilon$ ein nicht-trivialer $T(s)$ -periodischer Orbit von

$$\dot{u} = g(u, 0) = g_0(u)$$

durch den Punkt $p(s)$ ist.

Mit $\alpha(s) = 0$ für alle s folgt die Aussage des Satzes. □

Folgerung 5.5. *Sei*

$$\dot{u} = X_H(u) \tag{5.8}$$

ein Hamiltonsches System mit Hamiltonfunktion

$$H(u) = H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\|y\|^2}{2} + V(x) \tag{5.9}$$

für eine glatte Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sei p_0 ein Gleichgewichtspunkt des Systems, an dem die Hessematrix $\text{Hess}V(p_0)$ positiv definit ist, und für ein $l \in \mathbb{N}$ seien μ_1, \dots, μ_l einfache Eigenwerte von $\text{Hess}V(p_0)$ mit

$$\sigma(\text{Hess}V(p_0)) \cap \mu_j \mathbb{N} = \{\mu_j\},$$

für $j = 1, \dots, l$. Dann besitzt das Hamiltonsche System (5.8) in einer Umgebung von p_0 l verschiedene einparametrische Scharen nicht-trivialer periodischer Orbits wie in Satz 5.4 mit Perioden nahe $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu_j}}$ für $j = 1, \dots, l$.

Beweis. Wir verwenden Satz 5.4 für $g_0(u) = X_H(u)$ mit erstem Integral H . Im Gleichgewichtspunkt $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ gilt für das Hamiltonsche Vektorfeld

$$\begin{aligned} 0 &= X_H(p_0) \\ &= J \nabla H(p_0) \\ &= \begin{pmatrix} y_0 \\ -\nabla V(x_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist insbesondere

$$\nabla H(p_0) = 0$$

und die Matrix $Dg_0(p_0)$ hat die Form

$$\begin{aligned} Dg_0(p_0) &= DX_H(p_0) \\ &= DJ\nabla H(p_0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -\text{Hess}V(x_0) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren von $\text{Hess}V(x_0)$ zu den Eigenwerten $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}_+$. Dann sind

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \pm i\sqrt{\mu_1}v_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_n \\ \pm i\sqrt{\mu_n}v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

Eigenvektoren von $Dg_0(p_0)$ zu den Eigenwerten $\pm i\sqrt{\mu_1}, \dots, \pm i\sqrt{\mu_n} \in i\mathbb{R}$, da

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -\text{Hess}V(x_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j \\ \pm i\sqrt{\mu_j}v_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pm i\sqrt{\mu_j}v_j \\ -\text{Hess}V(x_0)v_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pm i\sqrt{\mu_j}v_j \\ -\mu_j v_j \end{pmatrix} \\ &= \pm i\sqrt{\mu_j} \begin{pmatrix} v_j \\ \pm i\sqrt{\mu_j}v_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, n$ gilt. Für die einfachen Eigenwerte μ_1, \dots, μ_l gilt nach Voraussetzung

$$\sigma(\text{Hess}V(p_0)) \cap \mu_j \mathbb{N} = \{\mu_j\},$$

also auch

$$\sigma(Dg_0(p_0)) \cap i\sqrt{\mu_j}\mathbb{Z} = \{\pm i\sqrt{\mu_j}\}$$

für $j = 1, \dots, l$.

Also besitzt nach Satz 5.4 das Hamiltonsche System (5.8) in einer Umgebung von p_0 l einparametrische Scharen nicht-trivialer periodischer Orbits mit Perioden nahe $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu_j}}$ für $j = 1, \dots, l$. \square

Hamiltonsche Systeme, die dem zweiten Newtonschen Gesetz der klassischen Mechanik unterworfen sind, sind von der Form (5.9). Für konstante Masse m lautet das zweite Newtonsche Gesetz

$$F(x) = m\ddot{x},$$

wobei F das Kraftfeld ist, dem ein Teilchen am Ort x unterworfen ist. Transformation

auf ein System erster Ordnung und setzen der Masse auf $m = 1$ liefert

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ F(x) \end{pmatrix}.$$

Die Hamiltonfunktion lautet

$$H(u) = \frac{\|y\|^2}{2} + V(x), \quad (5.10)$$

wobei $\frac{\|y\|^2}{2}$ die kinetische Energie und $V(x)$ das Potential des Teilchens im Punkt x ist. Der Zusammenhang von Kraft und Potential ist gegeben durch $-\nabla V(x) = F(x)$. Solche Hamiltonsche Systeme nennt man *physikalische* oder *normale Hamiltonsche Systeme*.

6 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten periodischer Orbits

In der Nähe periodischer Orbits eines kontinuierlichen dynamischen Systems gibt es unter gewissen Voraussetzungen Mannigfaltigkeiten, die positiv und negativ invariant unter dem Fluss des Systems sind. Diese Mannigfaltigkeiten teilen den Phasenraum in Bereiche mit verschiedenem Lösungsverhalten und sind damit ausschlaggebend für die Geometrie in der Nähe der periodischen Orbits.

Um einige der Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeiten zu untersuchen, werden wir das kontinuierliche System zunächst mit Hilfe der Poincaréabbildung auf ein diskretes dynamisches System zurückführen. Für das diskrete System werden wir anschließend einige Eigenschaften der invarianten Mannigfaltigkeiten angeben und damit einen Algorithmus zu deren Approximation motivieren.

6.1 Eigenschaften stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten

Der *Abstand* dist eines Punktes $u \in \mathbb{R}^n$ zu einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ des \mathbb{R}^n sei gegeben als

$$\text{dist}(u, M) := \inf_{p \in M} \|u - p\|. \quad (6.1)$$

Definition 6.1. (Vgl. [PM82], Abschnitte 2.6 und 3.1)

(i) Für $g_0 \in C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sei $\phi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Fluss des durch

$$\dot{u} = g_0(u) \quad (6.2)$$

gegebenen kontinuierlichen Systems. Sei Γ ein periodischer Orbit des Systems und $V \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von Γ . Dann heißen die Mengen

$$W_s^V(\Gamma) = \{u \in V \mid \phi^t(u) \in V \forall t \geq 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi^t(u), \Gamma) = 0\}$$

$$W_u^V(\Gamma) = \{u \in V \mid \phi^t(u) \in V \forall t \leq 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\phi^t(u), \Gamma) = 0\}$$

lokale stabile bzw. lokale instabile Menge von Γ bzgl. V .

- (ii) Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus, das heißt $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar mit $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Sei ξ ein Fixpunkt von F und $V \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von ξ . Dann heißen die Mengen

$$W_s^V(\xi) = \{u \in V \mid F^n(u) \in V \forall n \geq 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(u) = \xi\}$$

$$W_u^V(\xi) = \{u \in V \mid F^n(u) \in V \forall n \leq 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow -\infty} F^n(u) = \xi\}$$

lokale stabile bzw. lokale instabile Menge von ξ bzgl. V .

Falls $V = \mathbb{R}^n$, nennt man diese Mengen jeweils die globalen stabilen bzw. globalen instabilen Mengen.

Bemerkung 6.2. (i) Die in Definition 6.1 definierten Mengen sind nach Definition lokal positiv und negativ invariant im folgenden Sinne:

Im kontinuierlichen Fall gilt für alle $u \in W_s^V(\Gamma)$ (bzw. $u \in W_u^V(\Gamma)$) und für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\phi^t(u) \in V$ auch $\phi^t(u) \in W_s^V(\Gamma)$ (bzw. $\phi^t(u) \in W_u^V(\Gamma)$). Im diskreten Fall gilt für alle $u \in W_s^V(\xi)$ (bzw. $u \in W_u^V(\xi)$) und für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $F^n(u) \in V$ auch $F^n(u) \in W_s^V(\xi)$ (bzw. $F^n(u) \in W_u^V(\xi)$).

Die globalen stabilen und instabilen Mengen sind entsprechend invariant unter ϕ^t für alle $t \in \mathbb{R}$ bzw. unter F^n für alle $n \in \mathbb{Z}$.

- (ii) Eine stabile Menge eines periodischen Orbits Γ von System (6.2) ist eine instabile Menge des periodischen Orbits Γ des Systems

$$\dot{u} = -g_0(u)$$

und umgekehrt. Genauso ist eine stabile Menge eines Fixpunktes ξ eines \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus F eine instabile Menge des Fixpunktes ξ des \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus F^{-1} und umgekehrt.

6.2 Reduktion auf diskrete dynamische Systeme

Sei $p_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt auf einem periodischen Orbit Γ des Systems (6.2). Wir erinnern uns an die in Kapitel 1 definierte Poincaréabbildung von Γ bezüglich eines Poincaréschnittes Σ (siehe Definitionen 1.14 und 1.15):

Ein Poincaréschnitt des Systems (6.2) bei p_0 ist eine Hyperfläche

$$\Sigma = \{p \in U \mid \psi(p) = 0\},$$

wobei U eine Umgebung von p_0 in \mathbb{R}^n und $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\psi(p_0) = 0$ und

$$D\psi(p)g_0(p) \neq 0$$

für alle $p \in U$. Die Poincaréabbildung P von Γ bezüglich Σ und p_0 ist auf einer Umgebung $V \subset \Sigma$ von p_0 gegeben durch

$$\begin{aligned} P : V &\rightarrow \Sigma \\ p &\mapsto \phi^{\tau(p)}(p), \end{aligned}$$

wobei $\tau(p)$ die minimale Zeit ist, nach der ein Orbit mit Startpunkt $p \in \Sigma$ das nächste Mal in gleicher Richtung Σ durchstößt.

Die Poincaréabbildung P liefert auf Σ ein lokales diskretes dynamisches System

$$u_{n+1} = P(u_n), \tag{6.3}$$

mit einem Fixpunkt p_0 .

Durch Wahl geeigneter Koordinaten können wir die Poincaréabbildung als eine Abbildung $P : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ mit $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ auffassen, sodass die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit wie in Definition 6.1(ii) für das diskrete System (6.3) in \mathbb{R}^{n-1} definiert sind.

Das Verhalten des n -dimensionalen kontinuierlichen Systems nahe einem periodischen Orbit kann so durch ein $(n-1)$ -dimensionales diskretes dynamisches System nahe einem Fixpunkt beschrieben werden. Für die damit verbundenen Spektren und die stabilen und instabilen Mengen erhalten wir folgendes Resultat:

Proposition 6.3. *Sei $p_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt auf einem periodischen Orbit Γ des Systems (6.2) und ϕ^t der Fluss des Systems. Sei P die Poincaréabbildung des periodischen Orbits Γ bezüglich eines Poincaréschnittes Σ und p_0 definiert in einer Umgebung $V \subset \Sigma$ von p_0 . Dann gelten folgende Aussagen:*

(i)

$$\begin{aligned} W_s(\Gamma) &= \cup_{t \leq 0} \phi^t(W_s^V(p_0)) \\ \text{und } W_u(\Gamma) &= \cup_{t \geq 0} \phi^t(W_u^V(p_0)) \end{aligned} \tag{6.4}$$

(ii)

$$\sigma(D\phi^{\tau(p_0)}(p_0)) = \sigma(DP(p_0)) \cup \{1\}.$$

Beweis. (i) Siehe [Irw80].

(ii) Siehe [AM78], Abschnitt 7.1.

□

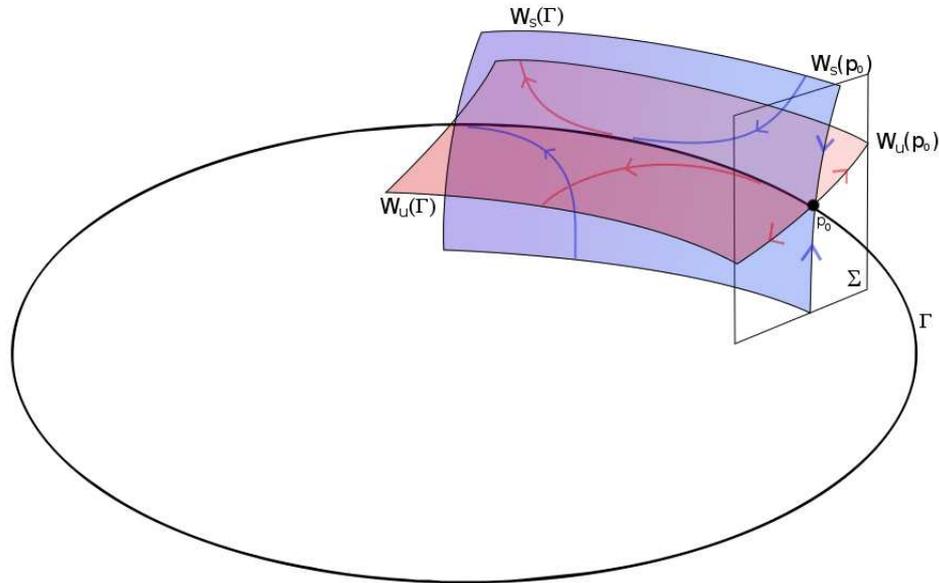


Abbildung 6.1: Lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeiten des Fixpunktes der Poincaréabbildung und des periodischen Orbits

Abbildung 6.1 veranschaulicht den Zusammenhang der lokalen stabilen und instabilen Mengen des Fixpunktes p_0 der Poincaréabbildung und des periodischen Orbits Γ .

Sind $W_s^V(p_0)$ und $W_u^V(p_0)$ glatte Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n , so kann man durch (6.4) auch eine Mannigfaltigkeiten-Struktur auf $W_s(\Gamma)$ und $W_u(\Gamma)$ definieren. Dabei handelt es sich im Allgemeinen aber nicht um Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n .

Definition 6.4. (vgl. [PM82], Abschnitte 2.3 und 3.1)

- (i) Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Fixpunkt der Abbildung $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann heißt ξ hyperbolisch, falls die Jacobimatrix $DF(\xi)$ keine Eigenwerte vom Betrag 1 besitzt.
- (ii) Sei Γ ein periodischer Orbit des Systems (6.2) durch einen Punkt $p_0 \in \mathbb{R}^n$ mit Poincaréabbildung P bez. eines Poincaréschnittes Σ und p_0 . Dann heißt Γ hyperbolisch, falls der Fixpunkt p_0 der Poincaréabbildung P hyperbolisch ist.

Definition 6.4 (ii) ist unabhängig von der Wahl der Poincaréabbildung und des Poincaréschnittes: Seien $P : V \rightarrow \Sigma$, $P' : V' \rightarrow \Sigma'$ zwei Poincaréabbildungen von Γ bezüglich der Poincaréschnitte Σ und Σ' durch die Punkte $p_0 \in \Sigma$ und $p'_0 \in \Sigma'$. Dann sind P und P' nach Proposition 1.16 (ii) lokal konjugiert. Also existieren offene Umgebungen $V_0 \subset V \cap P(V)$ von p_0 und $V'_0 \subset V' \cap P'(V')$ von p'_0 und ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus

$H : V_0 \rightarrow V'_0$, sodass $H(p_0) = p'_0$ und

$$P'(H(u)) = H(P(u)) \quad (6.5)$$

für alle $u \in V_0$. Differentiation von (6.5) in $u = p_0$ ergibt

$$DP'(p'_0)DH(p_0) = DH(p_0)DP(p_0),$$

also sind die Matrizen $DP'(p'_0)$ und $DP(p_0)$ ähnlich und haben insbesondere die gleichen Eigenwerte.

6.3 Existenz- und Eindeigkeitssatz stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten

Im Falle eines hyperbolischen Fixpunktes eines diskreten Systems existieren eindeutige lokale stabile und instabile Mengen. Diese Mengen sind insbesondere glatte Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n :

Satz 6.5 (Lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen Fixpunktes). *Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein hyperbolischer Fixpunkt der Abbildung $F \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Für das Spektrum von $B = DF(\xi)$ gelte*

$$\sigma(B) = \sigma_u \cup \sigma_s,$$

wobei

$$\begin{aligned} |\mu| &> 1 \text{ für } \mu \in \sigma_u, \\ |\mu| &< 1 \text{ für } \mu \in \sigma_s. \end{aligned}$$

Für $n_u = \#(\sigma_u)$, $n_s = \#(\sigma_s)$ wähle eine Basis des \mathbb{R}^n , sodass

$$B = \begin{pmatrix} B_u & 0 \\ 0 & B_s \end{pmatrix},$$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_s}$ und $E_u = \mathbb{R}^{n_u}$ und $E_s = \mathbb{R}^{n_s}$ die Haupträume zu σ_u und σ_s sind.

Dann existieren in einer Umgebung $V = V_u \times V_s$ von $\xi = (\xi_u, \xi_s)$ mit $v_u \subset E_u$ und $V_s \subset E_s$ eine eindeutige lokale stabile Menge $W_s^V(\xi)$, eine eindeutige lokale instabile Menge $W_u^V(\xi)$ und Abbildungen $h_u \in \mathcal{C}^l(V_u, \mathbb{R}^{n_s})$, $h_s \in \mathcal{C}^l(V_s, \mathbb{R}^{n_u})$ mit

$$\begin{aligned} W_u^V(\xi) &= \{(x, h_u(x)) \mid x \in V_u\} \\ W_s^V(\xi) &= \{(h_s(y), y) \mid y \in V_s\} \end{aligned}$$

und $h_u(\xi_u) = \xi_s$, $Dh_u(\xi_u) = 0$, $h_s(\xi_s) = \xi_u$ und $Dh_s(\xi_s) = 0$.

Insbesondere gilt

- $W_u^V(\xi)$ und $W_s^V(\xi)$ sind \mathcal{C}^l -Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n ,
- $W_u^V(\xi)$ ist tangential zu E_u und $W_s^V(\xi)$ ist tangential zu E_s in ξ .

Beweis. Siehe [PM82], Abschnitt 2.6. □

Lemma 6.6. *Falls die Voraussetzungen von Satz 6.5 für die Poincaréabbildung eines periodischen Orbits Γ von System (6.2) erfüllt sind, gibt es auch eine Umgebung V von Γ , in der eine eindeutige lokale stabile Menge $W_s^V(\Gamma)$ und eine eindeutige lokale instabile Menge $W_u^V(\Gamma)$ existieren, die \mathcal{C}^l -Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n und tangential zu E_u bzw. E_s sind.*

6.4 Konvergenzrate bei der Approximation instabiler Mannigfaltigkeiten

Als Nächstes sehen wir, mit welcher Konvergenzrate ein Punkt außerhalb der instabilen Mannigfaltigkeit innerhalb einer Umgebung unter Iteration von F gegen den dazugehörigen Punkt auf der Mannigfaltigkeit konvergiert. Dazu wählen wir zunächst geeignete Normen:

Lemma 6.7. *Für die Matrix B aus Satz 6.5 existieren Normen $\|\cdot\|_u, \|\cdot\|_s$ auf \mathbb{R}^{n_u} und \mathbb{R}^{n_s} , sodass für die zugehörigen Matrixnormen von B_u und B_s gilt*

$$\alpha := \|B_s\|_s < 1, \quad \beta := \|B_u^{-1}\|_u < 1.$$

Definiere dazu eine Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^n durch

$$\|z\| = \max(\|x\|_u, \|y\|_s)$$

für $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_s}$.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Der Spektralradius ρ von A ist definiert durch

$$\rho(A) := \max\{|\mu| \mid \mu \in \sigma(A)\}.$$

Für diesen gilt

$$\rho(A) = \inf\{\|A\| \mid \|\cdot\| \text{ eine Vektornorm in } \mathbb{R}^m\}$$

(siehe z.B. [Bey91], Abschnitt I.5).

Für Spektralradius der Matrizen $B_s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_s}, \mathbb{R}^{n_s})$ und $B_u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_u}, \mathbb{R}^{n_u})$ gilt somit

$$\inf\{\|B_s\| \mid \|\cdot\| \text{ eine Vektornorm in } \mathbb{R}^m = \rho(B_s)\} < 1$$

und mit $\sigma(B_u^{-1}) = \{\mu^{-1} | \mu \in \sigma(B_u)\}$ auch

$$\inf\{\|B_u^{-1}\| \mid \|\cdot\| \text{ eine Vektornorm in } \mathbb{R}^m = \rho(B_u^{-1})\} < 1.$$

Damit existieren Vektornormen $\|\cdot\|_u, \|\cdot\|_s$ auf \mathbb{R}^{n_u} und \mathbb{R}^{n_s} , sodass für die zugehörigen Matrixnormen von B_u und B_s gilt

$$\|B_s\|_s < 1, \|B_u^{-1}\|_u < 1.$$

□

Das berühmte λ -Lemma (vgl. [PM82], Abschnitt 2.7) besagt, dass der Abstand zwischen den Vorwärtsiterationen $F^n(D)$, $n \in \mathbb{N}$, einer Scheibe D , die transversal zur stabilen Mannigfaltigkeit ist, und der instabilen Mannigfaltigkeit beliebig klein wird.

Wir erhalten als Nächstes eine qualitative Formulierung dieses Ergebnisses:

Satz 6.8. *Für einen hyperbolischen Fixpunkt ξ eines \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus F seien die Voraussetzungen von Satz 6.5 erfüllt und $\|\cdot\|_u, \|\cdot\|_s$ und $\|\cdot\|$ die Normen aus Lemma 6.7. Dann existieren für jedes $\theta > 0$ ein $\kappa \in [\alpha, \alpha + \theta]$ und eine Umgebung U von ξ , sodass gilt:*

$$\begin{aligned} z_0 = (x_0, y_0) \in U \text{ mit } z_n = (x_n, y_n) = F^n(z_0) \in U \text{ für } n = 0, \dots, N \\ \Rightarrow \|y_n - h_u(x_n)\|_s \leq \kappa^n \|y_0 - h_u(x_0)\|_s \text{ für } n = 0, \dots, N, \end{aligned}$$

wobei

$$W_u^U(\xi) = \{(x, h_u(x)) \mid x \in U \cap E_u\}$$

die lokale instabile Mannigfaltigkeit in ξ bzgl. U ist.

Hinweise zum Beweis: In [Bey91], Kapitel II, Abschnitt 3 wurde dieser Satz bewiesen für die lokalen *Zentrumsmanigfaltigkeiten* eines Systems, in dem der Fixpunkt ξ nur ein stabiles und ein zentrales Spektrum besitzt, das heißt für $\sigma(DF(\xi)) = \sigma_c \cup \sigma_s$ mit $|\mu| = 1$ für $\mu \in \sigma_c$, $|\mu| < 1$ für $\mu \in \sigma_s$. Die lokalen *Zentrumsmanigfaltigkeiten* sind die unter F und F^{-1} lokal invarianten Mannigfaltigkeiten tangential zum Eigenraum des zentralen Spektrums σ_c .

Der Beweis im Falle eines hyperbolischen Fixpunktes verläuft analog. Für den Wert der Konstante κ ergibt sich dabei Folgendes:

Sei o.B.d.A. $\xi = 0$ und sei

$$L_\epsilon = \sup_{\|z\| \leq 2} \left\{ \|\chi'(z)\| \cdot \left\| \frac{1}{\epsilon} (F(\epsilon z) - DF(0)(\epsilon z)) \right\| + \|\chi\|_\infty \|DF(\epsilon z) - DF(0)\| \right\}$$

für eine *Abschneidefunktion* $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\chi(z) = 1$ für $\|z\| \leq 1$ und $\chi(z) = 0$ für $\|z\| \geq 2$. Dann ist für ϵ hinreichend klein $\kappa = \frac{\alpha + L_\epsilon}{1 - \beta L_\epsilon} \in [\alpha, \alpha + \theta]$. □

Bemerkung 6.9. Analog zum Fall des hyperbolischen Fixpunktes eines Diffeomorphismus kann man einen hyperbolischen Gleichgewichtspunkt u_0 des kontinuierlichen dynamischen Systems (6.2) betrachten: Sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $g_0(u_0) = 0$ und $\sigma(Dg_0(u_0)) = \sigma_u \cup \sigma_s$, wobei $\sigma_u = \{\mu \in \sigma \mid \operatorname{Re} \mu > 0\}$ und $\sigma_s = \{\mu \in \sigma \mid \operatorname{Re} \mu < 0\}$ das instabile und das stabile Spektrum von $Dg_0(u_0)$ sind. Dann folgen Existenz, Eindeutigkeit und Graphendarstellbarkeit der lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten analog zu Satz 6.5. Außerdem liefert ein Analogon von Satz 6.8 für $\|(x(0), y(0))\|$ hinreichend klein die Existenz von C_1 , $\lambda > 0$ und einer Umgebung U von u_0 , sodass mit einer entsprechenden Norm $\|\cdot\|_s$ gilt

$$\|y(t) - h_u(x(t))\|_s \leq C_1 e^{-\lambda t} \|y(0) - h_u(x(0))\|_s$$

für alle $t \geq 0$, solange $(x(t), y(t)) = \phi^t(x(0), y(0)) \in U$ (siehe [Car81], Abschnitt 2.4).

Als Nächstes werden wir sehen, wie lange für $z_0 \in U$ wie in Satz 6.8 die Folge $F^n(z_0)$ mindestens in einer Umgebung U bleibt.

Satz 6.10. Für einen hyperbolischen Fixpunkt $\xi = 0$ eines \mathcal{C}^l -Diffeomorphismus F seien die Voraussetzungen von Satz 6.5 erfüllt und $\|\cdot\|_u, \|\cdot\|_s$ und $\|\cdot\|$ die Normen aus Lemma 6.7. Seien V und U Umgebungen von ξ mit $U \subset V$, $B_r(0) \subset U$ für ein $r > 0$ und

$$L := \max_{z \in V} \|DF(z) - I\|.$$

Für ein $z_0 \in U$ sei $z_n := F^n(z_0) \in V$ für $n = 0, \dots, n_{\max}$. Dann ist $z_n \in U$ für $n = 0, \dots, N$, wobei

$$N = \left\lfloor \ln \left(\sqrt[l]{\frac{r}{\|z_0\|}} \right) \right\rfloor.$$

Beweis. Sei $n \leq N$. Mit $F(0) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} z_n &= z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) = z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (F(z_i) - z_i) \\ \Rightarrow \|z_n\| &\leq \|z_0\| + \sum_{i=0}^{n-1} \|(F - \operatorname{id})(z_i)\| \\ &= \|z_0\| + \sum_{i=0}^{n-1} \|(F - \operatorname{id})(z_i) - (F - \operatorname{id})(0)\| \\ &\leq \|z_0\| + L \sum_{i=0}^{n-1} \|z_i\|. \end{aligned}$$

Mit einer diskreten Version des Lemmas von Gronwall (siehe Anhang A, Lemma A.1) folgt daraus

$$\begin{aligned} \|z_n\| &\leq \|z_0\| e^{Ln} \\ &\leq \|z_0\| e^{L \ln\left(\sqrt[n]{\frac{r}{\|z_0\|}}\right)} \\ &= \|z_0\| e^{\ln\left(\frac{r}{\|z_0\|}\right)} \\ &= r \end{aligned}$$

und damit $z_n \in B_r(0) \subset U$. □

Als nächstes wollen wir den Abstand dist aus (6.1) bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ aus Lemma 6.7 zwischen den Iterationen $F^n(z_0)$, die außerhalb dieser Umgebung U liegen, und der instabilen Mannigfaltigkeit abschätzen.

Satz 6.11. *Seien die Voraussetzungen von Satz 6.8 erfüllt für den hyperbolischen Fixpunkt $\xi = 0$ eines \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus F . Für gegebenes $\theta > 0$ seien κ , U , L und N wie in Satz 6.10. Sei V eine Umgebung von ξ mit $U \subset V$, $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ und $F^n(z_0) \in V$ für $n = 0, \dots, n_{\max}$. Dann gilt für den Abstand des Punktes $F^m(z_0)$ mit $N < m \leq n_{\max}$ zur lokalen instabilen Mannigfaltigkeit*

$$\text{dist}(F^m(z_0), W_u^V(0)) \leq e^{(m-N)L} \kappa^N \|y_0 - h_u(x_0)\|_s.$$

Beweis. Sei L die Lipschitzkonstante von $F - \text{id}$ in V wie in Satz 6.10. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $z_n = (x_n, y_n) := F^n(z_0)$. Dann gilt analog zum Beweis von Satz 6.10

$$\begin{aligned} &\text{dist}(F^m(z_0), W_u^V(0)) \\ &= \inf_{w \in W_u^V(\xi)} \|F^m(z_0) - w\| \\ &\leq \|F^{m-N}(z_N) - F^{m-N}(x_N, h_u(x_N))\| \\ &\leq \|y_N - h_u(x_N)\|_s + L \sum_{n=0}^{m-N-1} \|z_{N+n} - (x_{N+n}, h_u(x_{N+n}))\|. \end{aligned}$$

Mit der diskreten Version des Lemmas von Gronwall in Anhang A (Lemma A.1) folgt

$$\begin{aligned} &\text{dist}(F^m(z_0), W_u^V(0)) \\ &\leq e^{(m-N)L} \|y_N - h_u(x_N)\|_s \\ &\leq e^{(m-N)L} \kappa^N \|y_0 - h_u(x_0)\|_s. \end{aligned} \quad \square$$

Nun wenden wir die Ergebnisse der vergangenen Sätze auf einen Startwert z_0 im instabilen Unterraum E_u an und erhalten so eine Abschätzung der Iterationen $F^n(z_0)$ innerhalb und außerhalb der Umgebung U .

Folgerung 6.12. *Seien die Voraussetzungen von Satz 6.11 erfüllt und für ein $\delta > 0$ sei $z_0 = (\delta v, 0)$, wobei $v \in E_u$ mit $\|v\| = 1$. Seien $U, V, L, r > 0$ und*

$$N = \left\lfloor \ln \left(\sqrt[L]{\frac{r}{\|z_0\|}} \right) \right\rfloor = \left\lfloor \ln \left(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}} \right) \right\rfloor$$

gegeben aus Satz 6.10. Dann gibt es ein $C > 0$, sodass gilt:

(i) *Falls $m \leq N$, gilt für den Abstand zur instabilen Mannigfaltigkeit*

$$\text{dist}(F^m(z_0), W_u^V(0)) \leq C \kappa^m \delta^2.$$

(ii) *Falls $N < m \leq n_{max}$, gilt für den Abstand zur instabilen Mannigfaltigkeit*

$$\begin{aligned} \text{dist}(F^m(z_0), W_u^V(0)) &\leq C e^{(m-N)L} \kappa^N \delta^2 \\ &\leq C e^{(m-\ln(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}})+1)L} \kappa^{\ln(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}})} \delta^2 \\ &= C e^{(m+1)L} r^{\frac{\ln \kappa}{L}-1} \delta^{3-\frac{\ln \kappa}{L}}. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Satz 6.5 gilt $h_u(0) = 0$ und $Dh_u(0) = 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} h_u(\delta v) &= h_u(0) + Dh_u(0)\delta v + \mathcal{O}(\|\delta v\|^2) \\ &= \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned}$$

Damit existiert eine Konstante $C > 0$, sodass $\|h_u(\delta v)\| \leq C\delta^2$, und nach Satz 6.8 ist

$$\text{dist}(F^m(z_0), W_u^V(0)) \leq C \kappa^m \delta^2,$$

falls $m \leq N$.

Nach Definition von N gilt

$$\ln \left(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}} \right) - 1 \leq N \leq \ln \left(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}} \right).$$

Nach Satz 6.11 gilt für $N < m \leq n_{max}$

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(F^m(z_0), W_u^V(0)) &\leq C e^{(m-N)L} \kappa^N \delta^2 \\
 &\leq C e^{(m-\ln(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}})+1)L} \kappa^{\ln(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}})} \delta^2 \\
 &= C e^{(m+1)L-\ln \frac{r}{\delta}} \left(\frac{r}{\delta}\right)^{\frac{\ln \kappa}{L}} \delta^2 \\
 &= C e^{(m+1)L} \frac{\delta}{r} r^{\frac{\ln \kappa}{L}} \delta^{-\frac{\ln \kappa}{L}} \delta^2 \\
 &= C e^{(m+1)L} r^{\frac{\ln \kappa}{L}-1} \delta^{3-\frac{\ln \kappa}{L}}.
 \end{aligned}$$

□

Dieses Ergebnis liefert uns eine Konvergenzrate für die numerische Approximation von Punkten auf der instabilen Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen Fixpunktes mit Hilfe der Vorwärtsiteration eines Punktes aus dem instabilen Unterraum.

Aus Proposition 6.3 wissen wir

$$W_u(\Gamma) = \cup_{t \geq 0} \phi^t(W_u^V(p_0)).$$

Dies motiviert uns, Kurven auf der instabilen Mannigfaltigkeit eines periodischen Orbits durch Vorwärtsintegration eines Startwerts aus dem instabilen Unterraum eines Fixpunktes einer Poincaréabbildung zu approximieren. Für solch einen Orbit erhalten wir folgendes Ergebnis:

Folgerung 6.13. *Sei Γ ein hyperbolischer periodischer Orbit des Systems (6.2) durch einen Punkt $p_0 \in \Sigma \times \{0\}$ mit Poincaréabbildung P bez. des Poincaréschnitts $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und p_0 . Für den hyperbolischen Fixpunkt p_0 des Diffeomorphismus P seien die Voraussetzungen von 6.12 erfüllt für $\mathbb{R}^n = E_u \times E_s \times \mathbb{R}$ und Umgebungen $U \subset \Sigma \times \{0\}$ von p_0 und $V \subset \mathbb{R}^n$ von Γ mit $U \subset V$. Für $t \geq 0$, $\delta > 0$ und $v \in E_u$ mit $\|v\| = 1$ sei $m \in \mathbb{N}_0$ maximal mit $\phi^{t_0}(\delta v, 0, 0) = P^m(\delta v, 0, 0)$ für ein $t_0 \leq t$. Seien L , r und*

$$N = \left\lfloor \ln \left(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}} \right) \right\rfloor$$

gegeben aus Satz 6.10. Dann gibt es ein $C > 0$, sodass gilt:

(i) Falls $m \leq N$ gilt für den Abstand zur instabilen Mannigfaltigkeit

$$\text{dist}(\phi^t(\delta v, 0, 0), W_u^V(\Gamma)) \leq C e^{(t-t_0)L} \kappa^m \delta^2.$$

(ii) Falls $m > N$ gilt für den Abstand zur instabilen Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} \text{dist}(\phi^t(\delta v, 0, 0), W_u^V(\Gamma)) &\leq C e^{(m-N+t-t_0)L} \kappa^N \delta^2 \\ &\leq C e^{(m-\ln(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}})+1+t-t_0)L} \kappa^{\ln(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}})} \delta^2 \\ &= C e^{(m+1+t-t_0)L} r^{\frac{\ln \kappa}{L}-1} \delta^{3-\frac{\ln \kappa}{L}}. \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\ln \left(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}} \right) - 1 \leq N \leq \ln \left(\sqrt[L]{\frac{r}{\delta}} \right).$$

Nach Lemma A.3 im Anhang A ist

$$\|\phi^{t-t_0}(z) - \phi^{t-t_0}(\tilde{z})\| \leq \|z - \tilde{z}\| e^{L(t-t_0)}$$

für alle $z, \tilde{z} \in V$ und $t - t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\phi^{t-t_0}(z), \phi^{t-t_0}(\tilde{z}) \in V$.

Sei $z_0 = (\delta v, 0, 0)$ und $z_n = P^n(z_0)$ für $n \in \mathbb{N}$. Einsetzen von $z = z_N$ und $\tilde{z} = (x_N, h_u(x_N))$ für $m > N$ bzw. $z = z_m$ und $\tilde{z} = (x_m, h_u(x_m))$ für $m \leq N$ liefert das Ergebnis. \square

Bemerkung 6.14. Sei $u_0 = 0$ ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt von 6.2, für den unter gewissen Voraussetzungen nach Bemerkung 6.9 für gewisse $C_1, \lambda > 0$

$$\|y(t) - h_u(x(t))\|_s \leq C_1 e^{-\lambda t} \|y(0) - h_u(x(0))\|_s$$

für alle $t \geq 0$, solange $(x(t), y(t)) = \phi^t(x(0), y(0)) \in U$. Wenn man hier für ein $\delta > 0$ einen Startwert $(x(0), y(0)) = (\delta v, 0)$ im instabilen Unterraum E_u mit $\|v\| = 1$ wählt, ergibt sich für ein $C_2 > 0$

$$\|y(t) - h_u(x(t))\|_s \leq C_1 e^{-\lambda t} \|h_u(\delta v)\|_s \leq C_2 e^{-\lambda t} \delta^2$$

für alle $t \geq 0$ mit $(x(t), y(t)) \in U$.

Eine Zeit t_{max} , sodass $(x(t), y(t)) \in U$ für alle $t \leq t_{max}$, ergibt sich hier außerdem als

$$t_{max} := \frac{1}{L'} \ln \left(\frac{r}{\|(x(0), y(0))\|} \right) = \frac{1}{L'} \ln \left(\frac{r}{\delta} \right),$$

wobei L' eine lokale Lipschitzkonstante und $r > 0$ ist, sodass $B_r(0) \subset U$.

Eine alternative Methode zur Berechnung stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten hyperbolischer Gleichgewichtspunkte und periodischer Orbits berechnet die Mannigfaltigkeiten mit Hilfe geodätischer Niveaumengen (siehe [KO03]):

Man startet mit einer Kugel im linearen Unterraum des Gleichgewichtspunktes oder periodischen Orbits. Die nächste geodätische Niveaumenge liegt in einem lokalen Koordinatensystem, das durch Hyperebenen bestimmt wird, die senkrecht auf der vorherigen

geodätischen Niveaumenge stehen. Die Stützstellen für die Approximation der nächsten Niveaumenge werden dabei durch das Lösen von Randwertproblemen bestimmt. Für hinreichend kleine Anfangsschrittweite und hinreichend „gute“ Stützstellen kann man mit dieser Methode die stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit in einer Umgebung des Gleichgewichtspunktes oder periodischen Orbits beliebig gut approximieren.

7 Anwendung des Programmpakets AUTO

Zur Fortsetzung periodischer Orbits in konservativen und Hamiltonschen Systemen werden wir das Programmpaket AUTO ([DO09]) verwenden.

In diesem Kapitel wird die Methode der Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung kurz erläutert, die das Programmpaket zur Fortsetzung von Lösungen verwendet. Anschließend werden wir sehen, wie sich diese speziell in konservativen Systemen zur Fortsetzung periodischer Orbits anwenden lassen.

Dieses Kapitel liefert lediglich die Motivation für die jeweiligen Anwendungen in AUTO, detaillierte Beschreibungen der Methoden findet man in [Kel77], [BCD⁺02] und [DDP01].

7.1 Die Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung

Die Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung ist eine Methode zur Fortsetzung von Nullstellen nichtlinearer Gleichungen, die auf H. B. Keller zurückgeht, siehe [Kel77].

Betrachte für glattes $G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$G(X) = 0. \tag{7.1}$$

Sei $X_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung von (7.1) und G eine Submersion in X_0 . Dann ist die Lösungsmenge von (7.1) nahe X_0 nach Satz 1.6 eine eindimensionale glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} . Sei \hat{X}_0 ein normierter Richtungsvektor dieses Lösungszweigs im Punkt X_0 , das heißt $\hat{X}_0 \in \text{Ker}(DG(X_0))$ und $\|\hat{X}_0\| = 1$. Dabei wird das Vorzeichen von \hat{X}_0 abhängig davon gewählt, in welche Richtung die Lösung fortgesetzt werden soll.

Um eine weitere Lösung X_1 auf dem Lösungszweig zu berechnen, löst man bei der Methode der Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung mit Hilfe des Newton-Verfahrens (siehe [HB09], Kapitel 19) die Gleichungen

$$\begin{aligned} G(X_1) &= 0 \\ (X_1 - X_0)^T \hat{X}_0 - \Delta s &= 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Das Newton-Verfahren für (7.2) kann geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} DG(X_1)^{(\nu)} \\ \hat{X}_0^T \end{pmatrix} \Delta X_1^{(\nu)} = - \begin{pmatrix} G(X_1)^{(\nu)} \\ (X_1^{(\nu)} - X_0)^T \hat{X}_0 - \Delta s \end{pmatrix}$$

$$X_1^{(\nu+1)} = X_1^{(\nu)} + \Delta X_1^{(\nu)}$$

für $\nu = 0, 1, 2, \dots$

In [Kel77] wurde gezeigt: Ist X_0 eine Lösung von (7.1), G eine Submersion in X_0 und Δs hinreichend klein, dann konvergiert das Newton-Verfahren zum Startwert

$$X_1^{(0)} = X_0 + \hat{X}_0 \Delta s.$$

Der nächste Richtungsvektor \hat{X}_1 wird so gewählt, dass $\hat{X}_1 \in \text{Ker}(DG(X_1))$, $\|\hat{X}_1\| = 1$ und dass er in dieselbe Richtung zeigt wie \hat{X}_0 . Letzteres kann man für hinreichend kleines Δs durch die Bedingung $\hat{X}_0^T \hat{X}_1 = 1$ erreichen. \hat{X}_1 ist hierdurch eindeutig bestimmt, da die Gleichung

$$\begin{pmatrix} DG(X_1) \hat{X}_1 \\ \hat{X}_0^T (\hat{X}_1 - \hat{X}_0) \end{pmatrix} = 0.$$

eine eindeutige normierte Lösung \hat{X}_1 besitzt (vgl. Folgerung 1.7).

Anschließend wird auf gleiche Weise X_2 aus X_1 berechnet usw. Bei der Berechnung der X_j entlang des Lösungszweigs wird die Schrittweite Δs jeweils so angepasst, dass die Konvergenz des Newtonverfahrens gewährleistet ist.

7.2 Fortsetzung von Gleichgewichtspunkten mit Entdeckung von Hopfpunkten

Für glattes $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ betrachte das parameterabhängige System

$$\dot{u} = g(u, \alpha).$$

Sei p_0 ein Gleichgewichtspunkt des Systems für ein $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Zur Fortsetzung dieses Gleichgewichtspunktes wenden wir die Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung auf $X_0 = (p_0, \alpha_0)$, $X_1 = (p_1, \alpha_1)$ und $G(X_1) = g(p_1, \alpha_1)$ an: Der normierte Richtungsvektor $(\hat{p}_0, \hat{\alpha}_0)$ wird bestimmt durch

$$\begin{aligned} D_u g(p_0, \alpha_0) \hat{p}_0 + D_\alpha g(p_0, \alpha_0) \hat{\alpha}_0 &= 0, \\ \|\hat{p}_0\|^2 + \hat{\alpha}_0^2 &= 1 \end{aligned}$$

und die gewünschte Fortsetzungsrichtung. Den nächsten Gleichgewichtspunkt p_1 zum Parameterwert α_1 berechnen wir mit Hilfe von AUTO als Lösung von

$$\begin{aligned} g(p_1, \alpha_1) &= 0 \\ (p_1 - p_0)^T \hat{p}_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)^T \hat{\alpha}_0 &= \Delta s \end{aligned}$$

mit Schrittweite Δs . Der nächste Richtungsvektor $(\hat{p}_1, \hat{\alpha}_1)$ ergibt sich entsprechend als Lösung von

$$\begin{aligned} D_u g(p_1, \alpha_1) \hat{p}_1 + D_\alpha g(p_1, \alpha_1) \hat{\alpha}_1 &= 0 \\ \|\hat{p}_1\|^2 + \alpha_1^2 &= 1 \\ \hat{p}_0^T \hat{p}_1 + \hat{\alpha}_0^T \hat{\alpha}_1 &= 1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Bedingung die Richtungserhaltung bezüglich des Richtungsvektors $(\hat{p}_0, \hat{\alpha}_0)$ für hinreichend kleines Δs sichert.

Als Nebenprodukt dieser Berechnungen speichert AUTO die Eigenwerte der Jacobimatrix $D_u g(p_1, \alpha_1)$. So können entlang des Zweiges Hopfpunkte entdeckt werden, in denen ein Paar einfacher Eigenwerte $\pm i\omega$ mit nicht-verschwindender Geschwindigkeit die imaginäre Achse überquert.

Im Falle eines konservativen Systems

$$\dot{u} = g_0(u)$$

mit Gleichgewichtspunkt p_0 und erstem Integral F , für das die Voraussetzungen des Ljapunovschen Zentrumstheorems (Satz 5.4) erfüllt sind, gilt Folgendes: Durch Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung des Parameters α im parameterabhängigen System

$$\dot{u} = g_0(u) + \alpha \nabla F(u) \tag{7.3}$$

erhalten wir keine „neuen“ Gleichgewichtspunkte, sondern den Gleichgewichtspunkt p_0 für verschiedene Parameterwerte α . Diese Methode liefert uns aber die Eigenwerte $\pm i\omega$ im Hopfpunkt $(p_0, 0)$. Den Wert ω kann man in einem nächsten Schritt nutzen um periodische Orbits der 1-Parameter-Familie periodischer Orbits nahe p_0 mit Periode nahe $\frac{2\pi}{\omega}$ zu berechnen.

7.3 Fortsetzung periodischer Lösungen mit Start in einem Hopfpunkt

Sei (p_0, α_0) einfacher Hopfpunkt eines parameterabhängigen Systems

$$\dot{u} = g(u, \alpha)$$

mit glattem $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ zum einfachen Eigenwertpaar $\pm i\omega$, $\omega > 0$. Dann existiert nach dem Hopf-Verzweigungstheorem 5.3 ein $\epsilon > 0$ und eine glatte Funktion

$$(p(\cdot), T(\cdot), \alpha(\cdot)) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \times \mathbb{R},$$

$$(p(0), T(0), \alpha(0)) = (p_0, T_0, \alpha_0) = \left(p_0, \frac{2\pi}{\omega}, \alpha_0\right),$$

sodass $p(\Delta s)$ Anfangspunkt einer 1-periodischen Lösung $u(t, \Delta s)$ der skalierten Gleichung $\dot{u}(t, \Delta s) = T(\Delta s)g(u, \alpha(\Delta s))$ ist.

Für hinreichend kleines Δs gilt

$$\begin{aligned} T(\Delta s) &= T_0 + \mathcal{O}(\Delta s^2) \\ \alpha(\Delta s) &= \alpha_0 + \mathcal{O}(\Delta s^2) \\ u(t, \Delta s) &= p_0 + \Delta s v(t) + \mathcal{O}(\Delta s^2) \end{aligned} \tag{7.4}$$

(siehe [MM76], Abschnitt 3C), wobei $v(t)$ eine Lösung der konstanten Variationsgleichung

$$\dot{v}(t) = T_0 D_u g(p_0, \alpha_0) v(t)$$

ist. Nach Voraussetzung ist $\pm 2\pi i$ ein Paar einfacher Eigenwerte von $T_0 D_u g(p_0, \alpha_0)$. Also existieren Vektoren $v_s, v_c \in \mathbb{R}^n$ mit

$$T_0 D_u g(p_0, \alpha_0)(v_s \pm v_c) = \pm 2\pi i(v_s \pm v_c).$$

Dann ist

$$v(t) := \sin(2\pi t)v_s + \cos(2\pi t)v_c$$

eine 1-periodische Lösung der Variationsgleichung.

Wir wenden die Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung zur Berechnung einer ersten periodischen Lösung von $\dot{u} = Tg(u, \alpha)$ wie folgt an: Setze $X_0 = (u_0(\cdot), T_0, \alpha_0)$, wobei $u_0(t) := p_0 + \Delta s v(t)$ und $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ ist und (p_0, α_0) der einfache Hopfpunkt ist. Wir

berechnen $u_1(\cdot) = u(\cdot, \Delta s)$, $T_1 = T(\Delta s)$ und $\alpha_1 = \alpha(\Delta s)$ als Lösungen von

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(\cdot) - T_1 g(u_1(\cdot), \alpha_1) &= 0 \\ u_1(0) - u_1(1) &= 0 \\ \int_0^1 u_1(t)^T \dot{u}_0(t) dt &= 0 \end{aligned}$$

mit Fortsetzungsgleichung

$$\int_0^1 (u_1(t) - u_0(t))^T \hat{u}_0(t) dt + (T_1 - T_0)^T \hat{T}_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)^T \hat{\alpha}_0 = \Delta s.$$

Nach Definition von u_0 ist $\dot{u}_0(t) = \Delta s \dot{v}(t)$ und $\hat{u}_0(t) = v(t)$. Aus (7.4) folgt außerdem $\hat{\alpha}_0 = 0$ und $\hat{T}_0 = 0$. Damit ergibt sich für $(u_1(\cdot), T_1, \alpha_1)$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(\cdot) - T_1 g(u_1(\cdot), \alpha_1) &= 0 \\ u_1(0) - u_1(1) &= 0 \\ \int_0^1 u_1(t)^T \dot{v}(t) dt &= 0 \\ \int_0^1 (u_1(t) - u_0(t))^T v(t) dt &= \Delta s. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Startfunktion u_0 keine Lösung von $\dot{u} = Tg(u, \alpha)$ ist, sondern die Linearisierung der Lösung $u(t, \Delta s) = p_0 + \Delta s v(t) + \mathcal{O}(\Delta s^2)$.

Die Gleichungen haben die Form eines Randwertproblems mit Integralbedingungen, für dessen numerische Lösung AUTO orthogonale Kollokation verwendet (siehe [Doe07]).

In dem Fall, dass das System $\dot{u} = g(u, \alpha)$ wie in (7.3) gegeben ist, gilt nach Lemma 2.7, dass $\alpha_1 = 0$ ist und u_1 eine T_1 -periodische Lösung des konservativen Systems $\dot{u} = g_0(u)$ ist.

7.4 Fortsetzung periodischer Lösungen

Wir betrachten ein allgemeines parameterabhängige System

$$\dot{u} = g(u, \alpha)$$

mit glattem $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Sei u_1 eine gegebene 1-periodische Lösung von $\dot{u} = T_1 g(u, \alpha_1)$, sodass für T nahe T_1 , α nahe α_1 und Anfangspunkten nahe $u_1(0)$ eine einparametrische Schar periodischer Lösungen von $\dot{u} = Tg(u, \alpha)$ existiert. Mit Hilfe der Pseudo-

Bogenlängen-Fortsetzung können wir eine nächste Lösung $(u_2(\cdot), T_2, \alpha_2)$ auf dem Lösungszweig als Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{u}_2(\cdot) - T_2 g(u_2(\cdot), \alpha_2) &= 0 \\ u_2(0) - u_2(1) &= 0 \\ \int_0^1 u_2(t)^T \dot{u}_1(t) dt &= 0 \end{aligned}$$

mit Fortsetzungsgleichung

$$\int_0^1 (u_2(t) - u_1(t))^T \hat{u}_1(t) dt + (T_2 - T_1)^T \hat{T}_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)^T \hat{\alpha}_1 = \Delta s$$

berechnen, wobei $(\hat{u}_1(\cdot), \hat{T}_1, \hat{\alpha}_1)$ der normierte Richtungsvektor des Lösungszweigs im Punkt $(\hat{u}_1, \hat{T}_1, \hat{\alpha}_1)$ in die gewünschte Fortsetzungsrichtung ist.

Genau wie bei der Berechnung eines periodischen Orbit nahe einem einfachen Hopf-punkt handelt es sich hierbei um ein Randwertproblem mit Integralbedingungen, das AUTO mit Hilfe orthogonaler Kollokation löst.

Den nächsten normierten Richtungsvektor $(\hat{u}_2(\cdot), \hat{T}_2, \hat{\alpha}_2)$ berechnet man als Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{\hat{u}}_2(\cdot) - T_2 D_u g(u_2(\cdot), \alpha_2) \hat{u}_2(\cdot) - g(u_2(\cdot), \alpha_2) \hat{T}_1 - T_1 D_\alpha g(u_2(\cdot), \alpha_2) \hat{\alpha}_2 &= 0 \\ \int_0^1 \hat{u}_1(t)^T \hat{u}_2(t) dt + \hat{T}_1 \hat{T}_2 + \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 &= 1 \\ \int_0^1 \hat{u}_2(t)^T \hat{u}_2(t) dt &= 1. \end{aligned}$$

Durch Wiederholung dieser Methode mit jeweiliger Anpassung der Schrittweite Δs können wir weitere periodische Lösungen auf dem Lösungszweig berechnen.

Falls das parameterabhängige System wie in (7.3) gegeben ist, gilt $\alpha_2 = 0$, sodass u_2 eine T_2 -periodische Lösung des konservativen Systems $\dot{u} = g_0(u)$ ist.

7.5 Approximation instabiler Mannigfaltigkeiten periodischer Orbits

Sei $\Gamma = \{\phi^t(0) | t \in [0, T]\}$ ein hyperbolischer T_0 -periodischer Orbit des Systems

$$\dot{u} = g_0(u), \tag{7.5}$$

wobei $g_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ glatt. Sei P die Poincaréabbildung auf einem Poincaréschnitt $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ durch 0. Dann existiert in einer Umgebung V von Γ eine eindeutige lokale instabile Mannigfaltigkeit $W_u^V(\Gamma)$ wie in Lemma 6.6. Aus Proposition 6.3 (i) wissen wir

$$\sigma(D\phi^T(0)) = \sigma(DP(0)) \cup \{1\}.$$

Falls $DP(0)$ genau einen instabilen Eigenwert hat, so ist die lokale instabile Mannigfaltigkeit $W_u^V(\Gamma)$ zweidimensional.

Wir wollen mit Hilfe der Vorwärtsintegration eines Orbits mit Startwert im instabilen Unterraum E_u eine Kurve auf $W_u^V(\Gamma)$ approximieren (vgl. Kapitel 6, insbesondere Folgerung 6.13).

Sei $\delta_0 > 0$ und $v \in E_u$ mit $\|v\| = 1$. Im ersten Durchlauf von AUTO lösen wir das Anfangswertproblem zum Startwert $\delta_0 v$, indem wir nach der „Integrationszeit“ T fortsetzen:

Für die Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung schreiben wir

$$G(X) = \begin{pmatrix} \dot{u}(\cdot) - Tg_0(u(\cdot)) \\ u(0) - \delta_0 v \end{pmatrix}$$

für

$$X = \begin{pmatrix} u(\cdot) \\ T \end{pmatrix}$$

und nehmen

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}$$

als Startwert der Fortsetzung, wobei $u_0(t) = \delta_0 v$ konstant ist. Die Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung liefert uns dann die Lösung dieses Anfangswertproblems bis zu verschiedenen Integrationszeiten T .

Im nächsten Durchlauf von AUTO setzen wir eine Lösung $\tilde{u}_0(\cdot)$ mit Integrationszeit T_0 aus dem ersten Durchgang fort, indem wir T_0 festhalten und den Parameter δ variieren lassen. Damit ergibt sich für die Pseudo-Bogenlängen-Fortsetzung

$$G(X) = \begin{pmatrix} \dot{u}(\cdot) - T_0 g_0(u(\cdot)) \\ u(0) - \delta v \end{pmatrix}$$

für

$$X = \begin{pmatrix} u(\cdot) \\ \delta \end{pmatrix}$$

und wir nehmen

$$X_0 = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0(\cdot) \\ \delta_0 \end{pmatrix}$$

als Startwert der Fortsetzung.

Alternativ kann man statt der Integrationszeit T_0 der Lösung aus dem ersten Durchlauf auch die Länge des Orbits \tilde{u}_0 , eine Koordinate des Endpunktes $\tilde{u}_0(1)$ oder einen anderen Parameter festhalten.

Diese Methode funktioniert analog für die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten von Gleichgewichtspunkten eines kontinuierlichen Systems. Für eine Übersicht über verschiedene Methoden zu deren Berechnung siehe [KOD⁺05].

8 Beispiele

In diesem Kapitel werden wir die theoretischen Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel anhand einiger Beispiele veranschaulichen.

In den Hamiltonschen Systemen, die durch das mathematische Pendel und den Duffing-Oszillator gegeben sind, werden wir mit Hilfe der Fortsetzungs- und Bifurkations-Software AUTO nahe den Gleichgewichtspunkten periodische Orbits berechnen und fortsetzen. Anschließend werden wir aus den Gleichungen des allgemeinen N -Körper-Problems die Gleichungen des eingeschränkten Dreikörperproblems in einem rotierenden Bezugssystem herleiten und dort nahe den Gleichgewichtspunkten periodische Orbits fortsetzen. Für zwei dieser Orbits werden wir anhand der in Kapitel 6 motivierten Methode die lokalen instabilen Mannigfaltigkeiten dieser Orbits approximieren.

8.1 Das mathematische Pendel

Ein einfaches Beispiel für die Anwendung der in Abschnitt 7.2 beschriebenen Fortsetzungsmethode ist das mathematische Pendel (vgl. [GVV07], Abschnitt 9.1.2). Es wird durch die Gleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$

beschrieben, wobei φ der Auslenkwinkel, g die Erdbeschleunigung und l die Fadenlänge ist. Setzen der Konstanten auf 1 und Transformation auf ein System erster Ordnung liefert für $u = (x, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ das Hamiltonsche System

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\sin(x) \end{pmatrix} = X_H(u). \quad (8.1)$$

Dabei beschreibt $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ die Auslenkung von der vertikalen Achse und $y \in \mathbb{R}$ die Winkelgeschwindigkeit des Massepunktes.

Die zugehörige Hamiltonsche Funktion H gibt die Gesamtenergie des Systems an und ist gegeben durch

$$H(u) = \frac{1}{2}y^2 - \cos(x) + 1.$$

Die Hamiltonsche Funktion ist bis auf Addition einer Konstanten das einzige erste Integral des Systems. Die Konstante von H wurde so gewählt, dass im Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ die Gesamtenergie gleich Null ist.

Es handelt sich hier um ein physikalisches Hamiltonsches System wie in (5.10) mit kinetischer Energie $\frac{1}{2}y^2$ und Potential $V(x) = -\cos(x) + 1$. Wegen

$$\text{Hess}V(0) = V''(0) = \cos(0) = 1 > 0$$

besitzt das System nach Folgerung 5.5 genau eine einparametrische Schar periodischer Orbits mit Periode nahe 2π .

Um Orbits dieser Schar mit Hilfe der Verzweigungssoftware AUTO berechnen zu können, ersetzen wir das konservative System (8.1) durch das dissipative System

$$\dot{u} = X_H(u) + \alpha \nabla H(u) = \begin{pmatrix} y + \alpha \sin(x) \\ -\sin(x) + \alpha y \end{pmatrix}.$$

Wenn wir die in Kapitel 7 beschriebene Fortsetzung von Gleichgewichtspunkten mit Ermittlung des Hopfpunktes bei $\alpha = -1$ mit dem Startwert $(x, y) = (0, 0)$ beginnen, finden wir eine Hopfverzweigung des Gleichgewichtspunktes im Punkt $(x, y, \alpha) = (0, 0, 0)$ (siehe Abbildung 8.1).

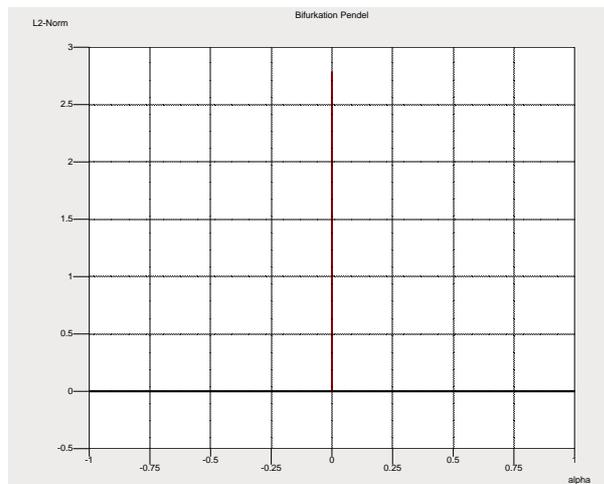


Abbildung 8.1: Das Bifurkationsdiagramm des mathematischen Pendels

Nach dem Wechsel des Zweiges werden im zweiten Durchlauf von AUTO periodische Lösungen nahe dem Hopfpunkt fortgesetzt. Die erhaltenen periodischen Orbits sind in Abbildung 8.2 dargestellt.

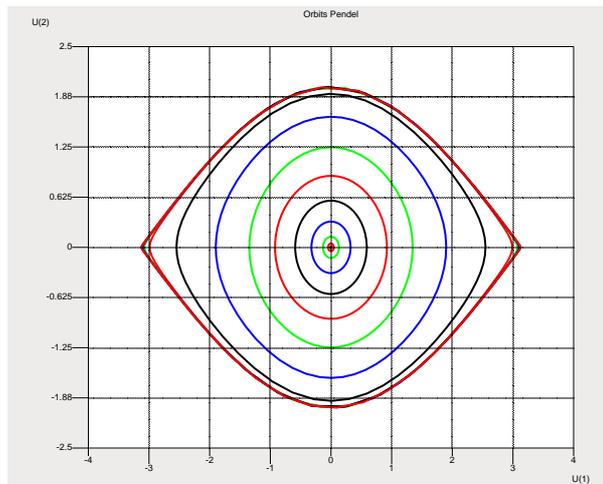


Abbildung 8.2: Periodische Orbits des mathematischen Pendels

8.2 Der Duffing-Oszillator

Ein weiteres einfaches Beispiel für die Fortsetzungsmethode in Hamiltonschen Systemen ist die Gleichung

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x(1-x^2) \end{pmatrix} = X_H(u). \quad (8.2)$$

Die zugehörige Hamiltonfunktion lautet

$$H(u) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

Dabei ist $\frac{1}{2}y^2$ der Anteil der kinetischen Energie und

$$V(x) := -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

das Potential, in dem sich das Teilchen bewegt (siehe Abbildung 8.3).

Das System besitzt die drei Gleichgewichtspunkte $(-1, 0)$, $(0, 0)$ und $(1, 0)$. In den Punkten $(\pm 1, 0)$ gilt für die Hessematrix des Potentials

$$\text{Hess}V(\pm 1) = V''(\pm 1) = -1 + 3(\pm 1)^2 = 2 > 0.$$

Dort entspringt nach Folgerung 5.5 je genau eine einparametrische Schar periodischer Orbits mit Periode nahe $\frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$. Im Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ gilt hingegen

$$\text{Hess}V(0) = V''(0) = -1 + 3(0)^2 = -1 < 0.$$

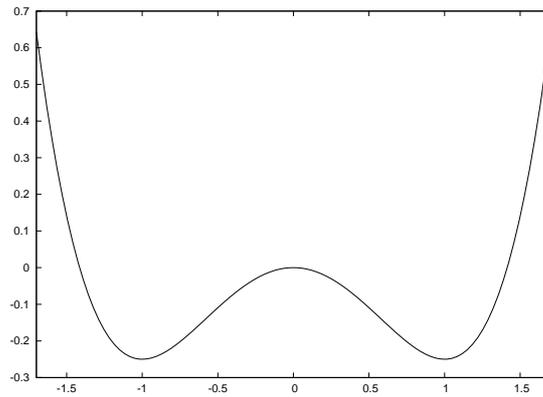


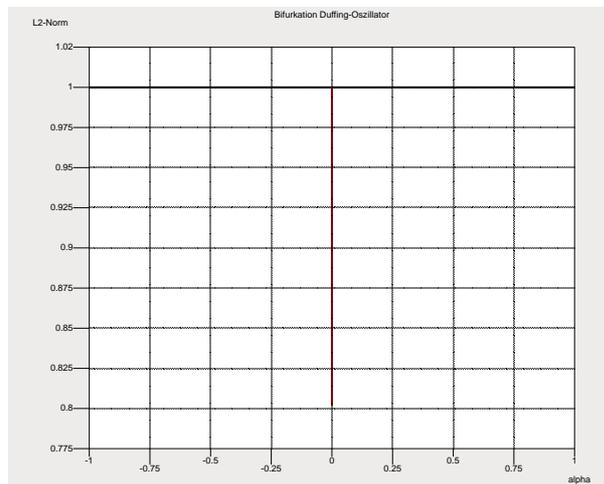
Abbildung 8.3: Das Potential des Duffing-Oszillators

Dort liefert uns Folgerung 5.5 keine Schar periodischer Orbits.

Das zum konservativen System (8.2) gehörige dissipative System lautet

$$\dot{u} = X_H(u) + \alpha \nabla H(u) = \begin{pmatrix} y + \alpha(-x(1-x)) \\ -x(1-x) + \alpha y \end{pmatrix}.$$

Bei $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ erhalten wir nach Anwendung der Methoden aus Kapitel 7 mit AUTO für $\alpha = 0$ Hopfverzweigungen, siehe in Abbildung 8.4.

Abbildung 8.4: Bifurkationsdiagramm des Duffing-Oszillators im Punkt $(-1, 0)$

Durch Fortsetzung der periodischen Lösungen nahe den Gleichgewichtspunkten $(\pm 1, 0)$ erhalten wir die in Abbildung 8.5 dargestellten periodischen Lösungen.

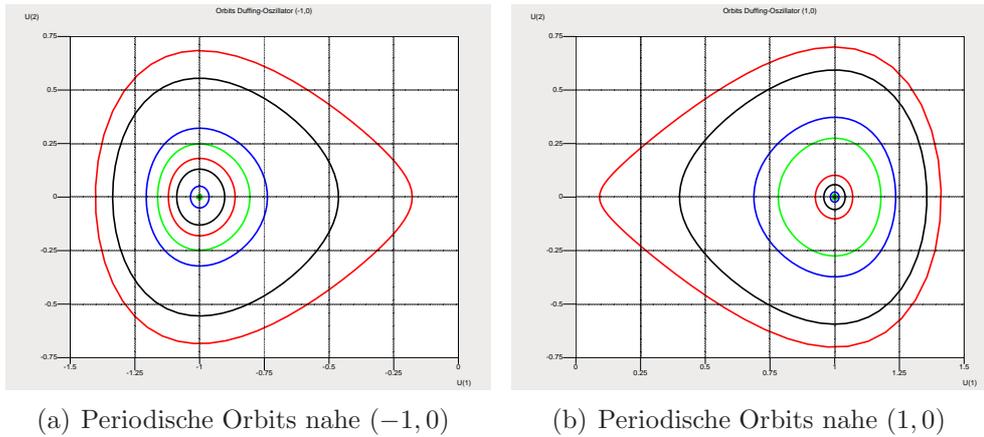


Abbildung 8.5: Periodische Orbits des Duffing-Oszillators

8.3 Das eingeschränkte Dreikörperproblem

Beim N -Körperproblem betrachtet man N Massepunkte im \mathbb{R}^3 , auf die nur die gegenseitige Gravitation wirkt (vgl. 3.2 und [MHO09]). Es seien $x_i \in \mathbb{R}^3$ der Ortsvektor und m_i die Masse des i -ten Massepunktes. Die Ortsvektoren x_1, \dots, x_N erfüllen jeweils ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\ddot{x}_i = -G \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} m_j \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3}.$$

Setzen der Gravitationskonstante auf $G = 1$ und Reduktion auf Systeme erster Ordnung ergibt

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i \\ \dot{y}_i &= - \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} m_j \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3}, \end{aligned}$$

dabei gibt $y_i \in \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit des i -ten Massepunktes an. Dies ist ein Hamiltonsches System mit Hamiltonfunktion

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|y_i\|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N m_j \frac{1}{\|x_i - x_j\|}.$$

Wenn wir das Massezentrum zum Zeitpunkt $t = 0$ in den Ursprung legen, hat dieses System sieben erste Integrale: Die drei Komponenten des Gesamtimpulses

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^N m_i y_i,$$

die drei Komponenten des Gesamtdrehimpulses

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^N m_i x_i \times y_i$$

und die Hamiltonfunktion selbst.

Das eingeschränkte Dreikörperproblem behandelt den speziellen Fall, dass die Masse m_1 des ersten Körpers vernachlässigbar gegenüber der Masse der anderen beiden Körper ist.

Wir setzen $m_1 = 0$ und

$$\mu := \frac{m_2}{m_2 + m_3},$$

wobei $m_2 \leq m_3$. Wir transformieren das Koordinatensystem in ein um den Masse-schwerpunkt der beiden Hauptkörper rotierendes Bezugssystem, in dem für die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der beiden Hauptkörper gilt:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 - \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -\mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_2 = y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Statt x_1 und y_1 schreiben wir $(x, y, z)^T$ und $(v_x, v_y, v_z)^T$ für den Orts- und den Geschwindigkeitsvektor des ersten Körpers. Auf ihn wirken im transformierten System die Coriolisbeschleunigung

$$a_c = 2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_y \omega \\ -v_x \omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

und die Zentrifugalbeschleunigung

$$a_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Als Bewegungsgleichungen des ersten Körpers erhalten wir somit aus (8.3) unter Berücksichtigung von (8.3), (8.4) und (8.5)

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{z} &= v_z \\
 \dot{v}_x &= 2v_y + x - (1 - \mu)(x - \mu)r_1^{-3} - \mu(x - 1 + \mu)r_2^{-3} \\
 \dot{v}_y &= -2v_x + y - (1 - \mu)yr_1^{-3} - \mu yr_2^{-3} \\
 \dot{v}_z &= -(1 - \mu)zr_1^{-3} - \mu zr_2^{-3},
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

wobei $r_1 := \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2}$ und $r_2 := \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}$.

Der Phasenraum von (8.6) hat einen invarianten Unterraum von Orbits, die in der Ebene liegen, in der sich die beiden Hauptkörper bewegen. Für die Orbits in diesem Unterraum gilt also $z = \dot{z} = 0$. Daraus ergibt sich das reduzierte System

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{v}_x &= 2v_y + x - (1 - \mu)(x - \mu)r_1^{-3} - \mu(x - 1 + \mu)r_2^{-3} \\
 \dot{v}_y &= -2v_x + y - (1 - \mu)yr_1^{-3} - \mu yr_2^{-3}
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

mit $r_1 := \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2}$ und $r_2 := \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}$.

8.3.1 Fortsetzung periodischer Orbits

Für System (8.6) wollen wir mit Hilfe von AUTO gemäß der Methoden aus Abschnitt 7.2 periodische Orbits nahe Gleichgewichtspunkten des eingeschränkten Dreikörperproblems numerisch berechnen. Dafür können wir im Programmpaket enthaltene Beispiel-Dateien zum eingeschränkten Dreikörperproblem im rotierenden Bezugssystem verwenden, siehe [DO09], Kapitel 14. Eine Auflistung aller Familien periodischer Orbits dieses Systems, die man durch Fortsetzung periodischer Orbits erhalten kann, findet sich in [DVRK⁺07].

Für jedes $\mu \in (0, 1)$ habe das Originalsystem (8.6) wie auch das reduzierte System (8.7) fünf Gleichgewichtspunkte in der Ebene der Hauptkörper ($z = 0$), die sogenannten *Lagrangepunkte* L_1, \dots, L_5 (siehe [Sze67]). Wie in Abbildung 8.6 für das Erde-Mond-System mit $\mu = 0,0123$ zu sehen ist, liegen die drei Punkte L_1, L_2 und L_3 kollinear zu den beiden Hauptkörpern. Die Punkte $L_4 = (\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und $L_5 = (\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ bilden jeweils ein gleichseitiges Dreieck mit ihnen.

Die Hessematrizen $\text{Hess}(L_i)$, $i = 1, \dots, 5$ sind invertierbar. Die Jacobimatrizen des Systems an den Lagrangepunkten L_1, L_2 und L_3 besitzen für jedes $\mu \in (0, 1)$ je genau

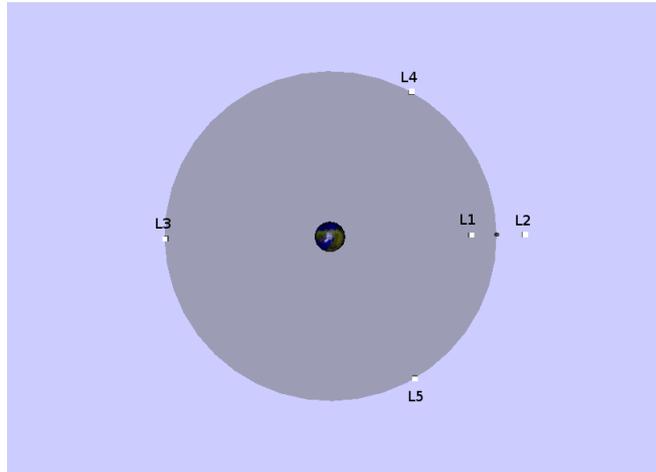


Abbildung 8.6: Die fünf Lagrangepunkte im Erde-Mond-System

zwei Paare rein imaginärer Eigenwerte $\pm i\omega_j, \pm i\tilde{\omega}_j$, $j = 1, 2, 3$, mit $\frac{\omega_j}{\tilde{\omega}_j} \notin \mathbb{Z}$. Nach dem Ljapunovschen Zentrumstheorem (Satz 5.4) entspringen dort also je zwei Familien periodischer Orbits mit Perioden nahe $\frac{2\pi}{\omega}$ bzw. $\frac{2\pi}{\tilde{\omega}}$. Eine dieser beiden Familien besteht aus planaren periodischen Orbits in der x - y -Ebene, die gleichzeitig Lösungen des reduzierten Systems sind. Diese Orbits nennt man *Ljapunovorbits*, siehe Abbildung 8.7 (a), (c) und (e). Die andere Familie ist jeweils die Familie der *vertikalen Orbits* nahe L_1 , L_2 und L_3 , siehe Abbildung 8.7 (b), (d) und (f).

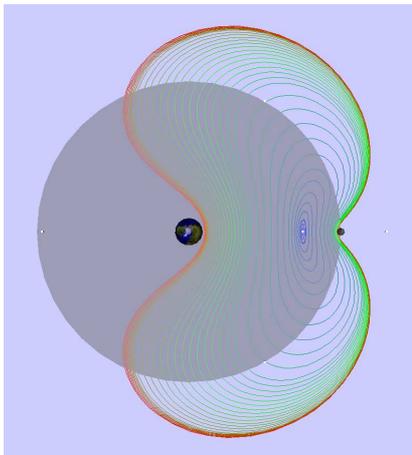
Für jedes $\mu \in (0, 1)$ besitzen die Jacobimatrizen an den anderen beiden Lagrangepunkten L_4 und L_5 mindestens ein Paar rein imaginärer Eigenwerte. Diese in L_1 und L_2 entstandenen Familien vertikaler periodischer Orbits gehen glatt ineinander über.

Für $\mu \in (0, \mu_0)$ mit

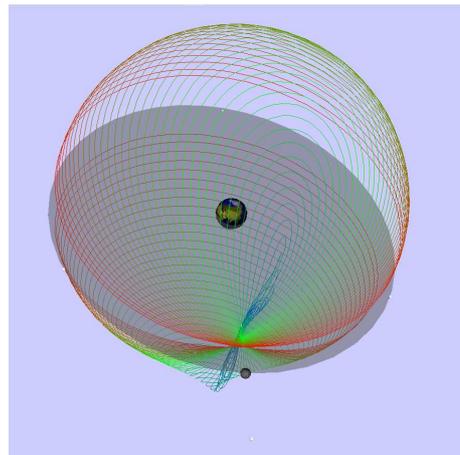
$$\mu_0 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}} \approx 0,0385$$

besitzt die Jacobimatrix in diesen beiden Gleichgewichtspunkten je zwei weitere Paare rein imaginärer Eigenwerte $\pm i\omega_s$ und $\pm i\omega_l$. Mit Ausnahme der Werte von μ , in denen $\frac{\omega_s}{\omega_l} \in \mathbb{Z}$, existieren dort je zwei zugehörige Familien planarer periodischer Orbits, die sogenannten *langperiodischen* bzw. *kurzperiodischen Orbits*. Die kurzperiodischen Familien von Orbits von L_4 und L_5 sind glatt miteinander verbunden, sodass es sich um dieselbe Familie handelt.

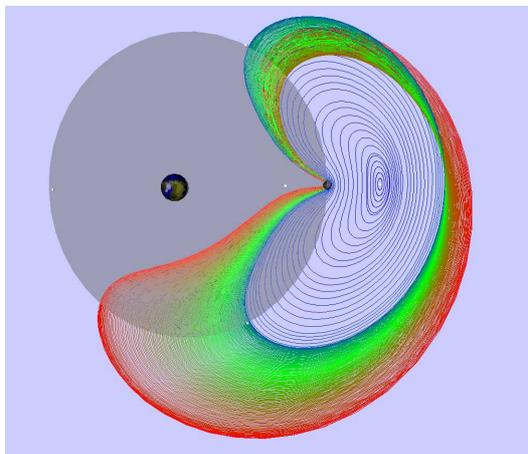
Bei der Fortsetzung periodischer Orbits im allgemeinen Dreikörperproblem kann man die Massen des zweiten und dritten Körpers festsetzen und die Masse des ersten Körpers als Parameter verwenden. Der sogenannte *figure-8-Orbit* (vgl. [CM00]) ist ein periodischer



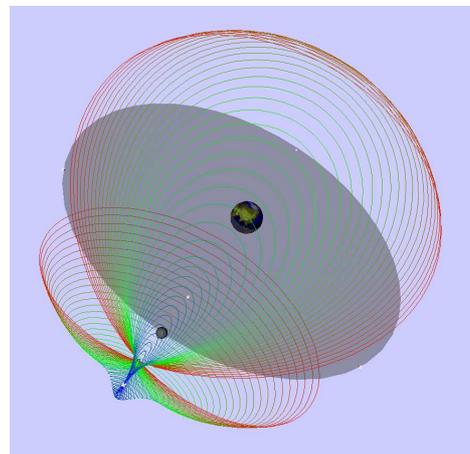
(a) Ljapunovorbits nahe L_1



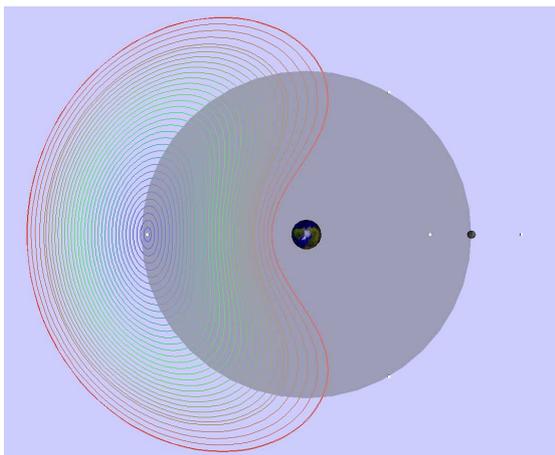
(b) Vertikale Orbits nahe L_1



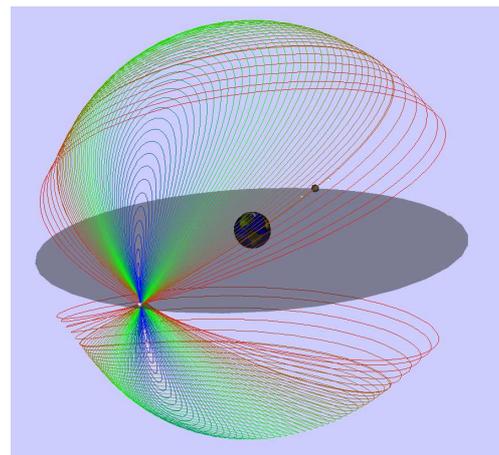
(c) Ljapunovorbits nahe L_2



(d) Vertikale Orbits nahe L_2



(e) Ljapunovorbits nahe L_3



(f) Vertikale Orbits nahe L_3

Abbildung 8.7: Periodische Orbits nahe L_1 , L_2 und L_3 im Erde-Mond-System

Orbit des Dreikörperproblems, bei dem die drei Körper mit gleichen Massen

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

sich auf einer Acht-förmigen Kurve in einer Ebene mit jeweils gleichem zeitlichen Abstand voneinander bewegen. Durch Variation der Masse m_1 und Festsetzen der Massen m_2 und m_3 kann man diesen Orbit zu einem periodischen Orbit des eingeschränkten Dreikörperproblems mit $m_1 = 0$ und $\mu = \frac{m_2}{m_2+m_3} = 0,5$ fortsetzen. Genauso kann man andere periodische Orbits des allgemeinen Dreikörperproblems zu Lösungen des eingeschränkten Problems fortsetzen, siehe dazu [DPK⁺03].

8.3.2 Approximation instabiler Mannigfaltigkeiten periodischer Orbits

Sei u_0 ein 1-periodischer Orbit des zu System (8.6) gehörigen skalierten Systems mit

$$\dot{u}_0 = T_0 g_0(u_0)$$

und $u_0(0) = p_0$ für ein $T_0 \in \mathbb{R}_+$ und ein $p_0 \in \mathbb{R}^3$. $DP(p_0)$ habe genau einen Eigenwert λ vom Betrag größer als 1, wobei P die Poincaréabbildung von u_0 bez. eines Poincaréschnitts Σ mit $p_0 \in \Sigma$ (vgl. Definitionen 1.14 und 1.15 sowie Kapitel 6).

Um wie in Abschnitt 7.5 beschrieben die lokale instabile Mannigfaltigkeit dieses periodischen Orbits zu approximieren, berechnen wir zunächst durch Fortsetzung der Integrationszeit T einen Orbit mit Startwert $p_0 + \delta_0 v$, wobei v Eigenvektor zum instabilen Eigenwert λ mit $\|v\| = 1$ ist (siehe Abbildung 8.8).

Im nächsten Durchlauf von AUTO setzen wir eine Lösung aus dem ersten Durchgang in

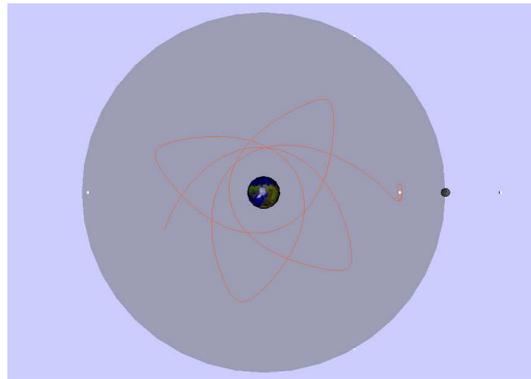
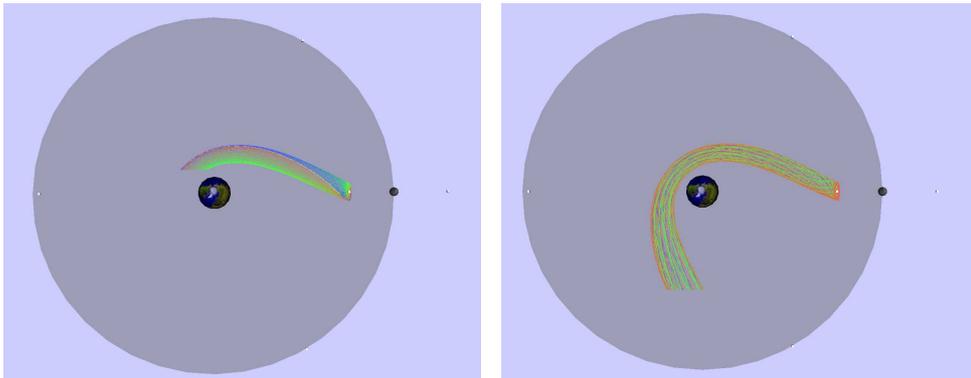


Abbildung 8.8: Startorbit nahe einem Ljapunovorbit von L_1

δ fort und fixieren die Integrationszeit T . Dadurch erhalten wir eine Reihe von Lösungen, die Lösungen auf der lokalen instabilen Mannigfaltigkeit von u_0 approximieren.

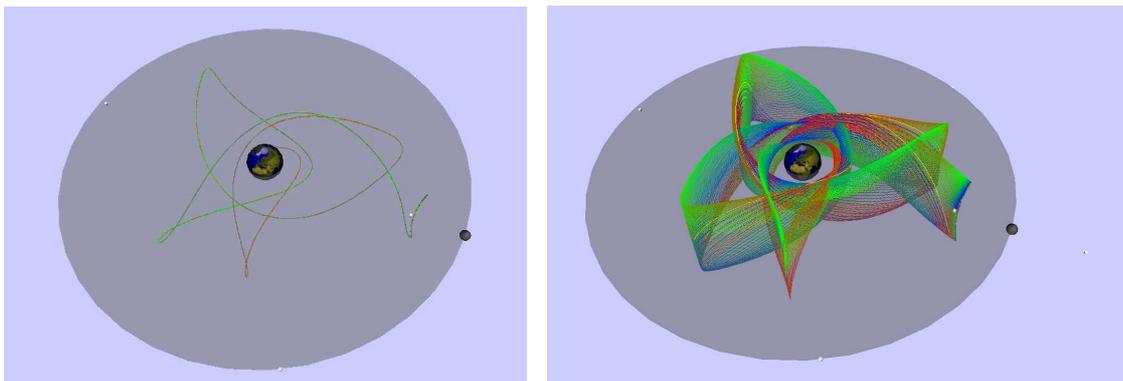
Alternativ kann man statt der Integrationszeit T in diesem Durchlauf auch einen anderen Parameter festhalten, wie zum Beispiel eine Koordinate des Endpunktes oder die Länge des Orbits.

Fortsetzung des in Abbildung 8.8 dargestellten Ljapunovorbits nach verschiedenen Integrationszeiten $T_1 < T_2$ mit Fixierung der y -Koordinate des Endpunktes liefert die in Abbildung 8.9 dargestellten lokalen instabilen Mannigfaltigkeiten. Ergebnisse der beiden Durchläufe von AUTO für die lokale instabile Mannigfaltigkeit eines vertikalen Orbits nahe L_1 sind in Abbildung 8.10 dargestellt.



(a) Fortsetzung des Startorbits aus Abb. 8.8 mit Integrationszeit T_1 (b) Fortsetzung des Startorbits aus Abb. 8.8 mit Integrationszeit $T_2 > T_1$

Abbildung 8.9: Approximation der instabilen Mannigfaltigkeit eines Ljapunovorbits



(a) Startorbit (b) Fortsetzung des Startorbits

Abbildung 8.10: Approximation der instabilen Mannigfaltigkeit eines vertikalen Orbits

A Diskretes und kontinuierliches Lemma von Gronwall

Lemma A.1. [Diskretes Lemma von Gronwall] Seien positive Zahlen $h_0, \dots, h_{N-1} > 0$ und Konstanten $a, b \geq 0$ gegeben. Für $v_0, \dots, v_N \in \mathbb{R}$ gelte

$$|v_0| \leq a, \quad |v_n| \leq a + b \sum_{i=0}^{n-1} h_i |v_i| \quad \text{für } n = 1, \dots, N.$$

Dann gilt

$$|v_n| \leq a e^{b \sum_{i=0}^{n-1} h_i} \quad \text{für } n = 1, \dots, N.$$

Beweis: Siehe [Pla06], Abschnitt 8.2.2. □

Lemma A.2. [Kontinuierliches Lemma von Gronwall] Es seien I ein reelles Intervall, $t_0 \in I$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Sei außerdem $y : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ stetig und erfülle

$$y(t) = \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau \right|$$

für alle $t \in I$. Dann gilt für alle $t \in I$

$$y(t) \leq \alpha e^{\beta |t-t_0|}.$$

Beweis: Siehe [AE06], Kapitel VII. □

Mit Hilfe dieses Lemmas lässt sich eine allgemeine Abschätzung für den Abstand zweier Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung in Abhängigkeit zum Abstand ihrer Anfangswerte herleiten.

Lemma A.3. Für $g_0 \in C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $l \geq 1$, sei $\phi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Fluss des kontinuierlichen Systems

$$\dot{u} = g_0(u). \tag{A.1}$$

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann existiert ein $L_K > 0$, sodass

$$\|\phi^t(z_1) - \phi^t(z_2)\| \leq \|z_1 - z_2\| e^{L_K t}$$

für alle $z_1, z_2 \in K$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $\phi^t(z_1), \phi^t(z_2) \in K$.

Beweis: Da $g_0 \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $l \geq 1$, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, ist g_0 auf K Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L_K . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 & \|\phi^t(z_1) - \phi^t(z_2)\| \\
 &= \|\phi^0(z_1) - \phi^0(z_2) + \int_0^t \dot{\phi}^s(z_1) - \dot{\phi}^s(z_2) ds\| \\
 &= \|z_1 - z_2 + \int_0^t g_0(\phi^s(z_1)) - g_0(\phi^s(z_2)) ds\| \\
 &\leq \|z_1 - z_2\| + \int_0^t \|g_0(\phi^s(z_1)) - g_0(\phi^s(z_2))\| ds \\
 &\leq \|z_1 - z_2\| + \int_0^t L_K \|\phi^s(z_1) - \phi^s(z_2)\| ds.
 \end{aligned}$$

Mit dem kontinuierlichen Lemma von Gronwall (Lemma A.2) folgt

$$\begin{aligned}
 & \|\phi^t(z_1) - \phi^t(z_2)\| \\
 &\leq \|z_1 - z_2\| + \int_0^t \|z_1 - z_2\| L_K e^{\int_s^t L_K dr} ds \\
 &= \|z_1 - z_2\| (1 + L_K \int_0^t e^{L_K(t-s)} ds) \\
 &= \|z_1 - z_2\| e^{L_K t}.
 \end{aligned}$$

□

Symbolverzeichnis

\mathbb{N}	$= \{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0	$= \{0\} \cup \mathbb{N}$
\mathbb{R}^+	$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$Dg(u)$	$= \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial g}{\partial u_n}(u)\right)$ für $u \in \mathbb{R}^n, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
$\nabla g(u)$	$= \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial g}{\partial u_n}(u)\right)^T$ für $u \in \mathbb{R}^n, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
$\text{Hess}g(u)$	$= D(\nabla g)(u)$ für $u \in \mathbb{R}^n, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
$B_\epsilon(x)$	$= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \ y - x\ < \epsilon\}$ bzgl. einer Norm $\ \cdot\ $ auf \mathbb{R}^n
$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$	Raum der linearen Abbildungen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n für ein $l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$
$\mathcal{C}^l(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$	Raum der l -mal stetig differenzierbaren Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n
$\sigma(A)$	Spektrum einer Matrix A
$\#(M)$	Anzahl der Elemente einer Menge M
$\lfloor x \rfloor$	untere Gaußklammer
id	Identitätsabbildung
$\mathcal{O}(\cdot)$	großes Landau-Symbol
$v \times w$	Kreuzprodukt zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$

Literaturverzeichnis

- [AE06] AMANN, H. ; ESCHER, J.: *Analysis II*. Birkhäuser Verlag, 2006
- [AM78] ABRAHAM, R.H. ; MARSDEN, J.E.: *Foundations of Mechanics*. Benjamin/Cummings, 1978
- [Ama95] AMANN, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 2. Auflage. de Gruyter, 1995
- [BCD⁺02] BEYN, W.-J. ; CHAMPNEYS, A. ; DOEDEL, E. ; GOVAERTS, W. ; KUZNETSOV, Y. ; SANDSTEDE, B.: Numerical continuation, and computation of normal forms. In: FIEDLER, B. (Hrsg.): *Handbook of dynamical systems* Bd. 2. 2002, S. 149–219
- [Bey91] BEYN, W.J.: *Dynamische Systeme*. 1991. – Vorlesungsskriptum
- [Car81] CARR, J.: *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer Verlag, 1981
- [CM00] CHENCINER, A. ; MONTGOMERY, R.: A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses. In: *Annals of Mathematics* (2000), Nr. 152, S. 881–901
- [DDP01] DICHMANN, D. J. ; DOEDEL, E. J. ; PAFFENROTH, R. C.: Continuation of Periodic Orbits around Lagrange Points and AUTO2000. In: *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*. Quebec City, Canada, July 2001
- [DO09] DOEDEL, E. J. ; OLDEMAN, B. E.: AUTO-07p: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations / Department of Computer Science, Concordia University Montreal, Canada. 2009. – Forschungsbericht. – (siehe <http://cmv1.cs.concordia.ca/auto/>)
- [Doe07] DOEDEL, E.J.: Lecture Notes on Numerical Analysis of Nonlinear Equations. In: KRAUSKOPF, B. (Hrsg.) ; OSINGA, H. (Hrsg.) ; GALÁN-VIOQUE, J. (Hrsg.): *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems*, Springer Verlag, 2007, S. 269–299
- [DPK⁺03] DOEDEL, E.J. ; PAFFENROTH, R.C. ; KELLER, H.B. ; DICHMANN, D.J. ; GALÁN-VIOQUE, J. ; VANDERBAUWHEDDE, A.: Computation of periodic solutions of conservative systems with application to the 3-Body problem.

- In: *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 13 (2003) 1353–1381 13 (2003), Nr. 6, S. 1353–1381
- [DVRK⁺07] DOEDEL, E.J. ; V. ROMANOV, R.C. P. ; KELLER, H.B. ; DICHMANN, D.J. ; GALÁN-VIOQUE, J. ; VANDERBAUWHEDE, A.: Elemental Periodic Orbits associated with the Libration Points in the Circular Restricted 3-Body Problem. In: *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering* 17 (2007), S. 2625–2677
- [GVV07] GALÁN-VIOQUE, J. ; VANDERBAUWHEDE, A.: Continuation of Periodic Orbits in Symmetric Hamiltonian Systems. In: KRAUSKOPF, B. (Hrsg.) ; OSINGA, H. (Hrsg.) ; GALÁN-VIOQUE, J. (Hrsg.): *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems*, Springer Verlag, 2007, S. 269–299
- [HB09] HANKE-BOURGEOIS, M.: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. 3. Auflage. Vieweg + Teubner, 2009
- [Irw80] IRWIN, M.C.: *Smooth dynamical systems*. Academic Press, 1980
- [Kel77] KELLER, H.B.: Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. In: RABINOWITZ, P.H. (Hrsg.): *Applications of Bifurcation Theory*. New York : Academic Press, 1977, S. 359–384
- [KO03] KRAUSKOPF, B. ; OSINGA, H. M.: Computing Geodesic Level Sets on Global (Un)stable Manifolds of Vector Fields. In: *SIAM J. Applied Dynamical Systems* 2 (2003), Nr. 4, S. 546569
- [KOD⁺05] KRAUSKOPF, B. ; OSINGA, H. M. ; DOEDEL, E. J. ; HENDERSON, M. E. ; GUCKENHEIMER, J. M. ; VLADIMIRSKY, A. ; DELLNITZ, M. ; JUNGE, O.: A Survey of Methods for Computing (Un)Stable Manifolds of Vector Fields. In: *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering* 15 (2005), Nr. 3, S. 763–791
- [MFG⁺03] MUÑOZ-ALMARAZ, F.J. ; FREIRE, E. ; GALÁN, J. ; DOEDEL, E.J. ; VANDERBAUWHEDE, A.: Continuation of periodic orbits in conservative and Hamiltonian systems. In: *Physica D* 181 (2003), S. 1–38
- [MHO09] MEYER, K. ; HALL, G. ; OFFIN, D.: *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*. 2. Auflage. Springer Verlag, 2009
- [MM76] MARSDEN, J. E. ; MCCRACKEN, M.: *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Springer Verlag, 1976
- [Pla06] PLATO, R.: *Numerische Mathematik kompakt: Grundlagenwissen für Studium und Praxis*. 3. Auflage. Vieweg, 2006

- [PM82] PALIS, J. ; MELO, W. de: *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer Verlag, 1982
- [Sze67] SZEBEHELY, V.: *Theory of orbits*. Academic Press, 1967