UNIVERSITÉ DE SAVOIE U.F.R. DE SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

Un principe de séparation des variables pour le spectre du laplacien des formes différentielles et applications

THÈSE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE SAVOIE

Discipline : Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement

par

Paul-Andi Nagy

le 17 juillet 2001

devant le JURY composé par :

Président	Jean-Pierre Demailly	Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble
Rapporteurs	Christian Bär	Professeur à l'Université de Hamburg, Allemagne
	Gilles Carron	Professeur à l'Université de Nantes
Examinateurs	Fernand Pelletier	Professeur à l'Université de Savoie
	Michel Rumin	Maître de Conférences à l'Université Paris - Sud
Directeur de thèse	Bruno Colbois	Professeur à l'Université de Neuchâtel, Suisse

Laboratoire de Mathémathiques EP 2067 du CNRS et de l'Université de Savoie

Remerciements

Avant tout, je tiens à remercier Bruno Colbois, pour le soutien qu'il m'a apporté durant toutes ces années.

J'aimerais aussi remercier le Département de Mathématiques de l'Université d'Avignon, pour son chalereux accueil durant l'année académique 1999-2000, qui m'a permis d'achever la rédaction de ce travail.

Des remerciements son dus également à ma famille, depuis longtemps mon plus fidèle supporter.

Enfin, je dédie cette thèse à mes grands-parents, à ma mère, ainsi qu'à ma fille ainée, Irène, que je remercie pour son concours.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Préliminaires **9**
2.1 La décomposition du Laplacien 9
2.2 Le cas d'une fibration au-dessus d'une variété de Hodge 17
2.2.1 Les opérateurs ∂_H et $\overline{\partial_H}$ 24
2.2.2 Formules de commutation polynômiales 26
2.3 Les espaces $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 27
2.4 La décomposition de Hodge des espaces propres de Δ_H^T 31

3 Quelques lemmes techniques **35**
3.1 Introduction 35
3.2 La décomposition de l'espace E 36
3.2.1 Définitions et motivation 36
3.2.2 Une première décomposition de E 38
3.2.3 L'espace I_1 43
3.2.4 Résumé des résultats obtenus 45
3.3 La réalisation de l'espace E 46
3.3.1 Quelques définitions 46
3.3.2 Réalisation de l'espace I_1 48
3.3.3 Réalisation de l'espace E_1 51
3.3.4 Réalisation de l'espace E_2 54

4 Spectre du laplacien sur les formes de (M, g_T) **59**
4.1 Introduction et définitions 59
4.2 Le principe de séparation des variables dans le spectre des formes de (M, g_T) . 61
4.3 Démonstration du Théorème 4.2.1 68
4.3.1 La stratégie 68
4.3.2 L'espace $E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{T}_{2p+2}^s$ 70
4.3.3 L'espace $E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{R}_{2p+2}^s$ 78
4.3.4 La démonstration du théorème 4.2.1 82

5 Applications du principe de séparation des variables **85**
5.1 Introduction 85
5.2 Spectre cohomologique 86

5.3 Le problème des petites valeurs propres 89
5.4 Asymptotique du spectre et de la trace du noyau de la chaleur de Δ_{g_T} lorsque $T \to 0$ 93
5.5 Asymptotique du spectre de Δ_{g_T} lorsque $T \to \infty$ 101

6 Le spectre d'une classe de variétés de Heisenberg 105
6.1 Rappels géométriques 105
6.2 Calcul du spectre des variétés $M(r, J, T)$ 107

7 Le spectre des sphères de Berger 111
7.1 Le contexte géométrique 111
7.2 Le spectre des formes équivariantes de la sphère canonique 112
7.3 Calcul du spectre des variétés $(S^{2r+1}, h_T),\ T > 0$ 118

A La multiplicité du spectre équivariant de (S^{2r+1}, h_1) 123

B Sur la géométrie des variétés (M, g_T) 129

Bibliographie 133

Index de notations 137

Chapitre 1

Introduction

Dans ce travail on étudie le spectre du laplacien agissant sur les formes différentielles d'un fibré en cercles au-dessus d'une variété de Hodge. Le résultat principal de cette thèse est un principe de séparation des variables (thm. 4.2.1, thm. 4.2.3) énoncé et démontré au chapitre 4. Le but est de décrire le spectre des formes d'un fibré en cercles comme résultant, via un procédé explicite, du spectre d'un laplacien horizontal et d'un laplacien vertical, comme cela est trivialement vrai lorsque l'on a un produit riemannien, et comme cela est traité pour le cas des fonctions dans [2]. La preuve de ces théorèmes est basée sur l'analyse de notre configuration géométrique, qu'on fait au chapitre 2 et sur une technique mise au point au chapitre 3. Les applications de ce résultat, décrits aux chapitres 5, 6, 7, sont de deux ordres : calculs explicites de spectres et étude de situations limites.

Lorsque la géométrie de la base n'est pas trop compliquée, il est possible de déterminer explicitement le spectre du fibré pour toutes les longueurs de la fibre. Cela est fait au chapitre 6 pour des variétés de Heisenberg et au chapitre 7 pour la sphère de dimension impaire munie de métriques de Berger, vue comme S^1 fibré sur le projectif complexe. Ce sont à notre connaissances les premiers exemples de calculs explicites pour une famille continue non triviale de métriques riemanniennes.

Lorsque la longueur de la fibre tend vers 0 ou vers infini, on étudie le comportement asymptotique du spectre. On retrouve dans notre cas particulier, mais en plus précis, des résultats obtenues par M. Rumin (lorsque la longueur tend vers infini) et par Colbois-Courtois (lorsque la longueur tend vers 0). Dans ce dernier cas, on obtient également une formule pour le développment asymptotique de la trace du noyau de la chaleur.

Rappelons quelques faits et notations concernant le spectre des formes différentielles d'une variété.

Lorsque $[Z^n, g]$ est une variété riemannienne lisse, compacte, connexe et orientée, nous notons $\Lambda^p(Z)$ l'espace des p-formes différentielles C^∞.
Si

$$d : \Lambda^p(Z) \to \Lambda^{p+1}(Z)$$

est la différentielle exterieure nous considérons $d^\star$ son adjoint formel afin de pouvoir former le laplacien

$$\Delta : \Lambda^p(Z) \to \Lambda^p(Z), \Delta = dd^\star + d^\star d.$$

C'est un opérateur positif, autoadjoint et elliptique, donc il possède un spectre discret

$$0 = \lambda_0^p(Z,g) < \lambda_1^p(Z,g) \leq \lambda_2^p(Z,g) \leq \ldots \lambda_n^p(Z,g) \leq \ldots$$

Chaque valeur propre non nulle sera comptée avec sa multiplicité s'il y a lieu. La multiplicité de la valeur propre nulle est un invariant topologique de la variété, le p-ième nombre de Betti de Z (voir [41] pour une introduction rapide au spectre du laplacien ainsi que [4] ; pour la géometrie riemannienne nécéssaire voir [18]).

Les interactions du 0-spectre (i.e. le spectre des fonctions) avec la géometrie de la variété font l'objet d'une vaste littérature. Pour ce qui est du p-spectre, $p \geq 1$, la situation est complètement différente.

Une direction que l'on peut prendre, dans l'espoir de se faire une intuition (et de tester diverses conjectures) est de donner des exemples concrets où le calcul du p-spectre est possible. Les exemples (peu nombreux) connus à l'heure actuelle sont contenus dans le tableau suivant.

$\mathbb{R}^n/\Gamma$	tores plats	[4]
S^n	sphères de courbure constante	[35]
$P\mathbb{C}^n$	projectif complexe canonique	[35]
G	groupes de Lie compacts semisimples avec une métrique biinvariante	[1]
H_{2n+1}	variétés de Heisenberg, pour les 1-formes invariantes par S^1	[26]
M	espace symétrique compact simplement connexe et irréductible, pour les 1-formes	[30], [31]
$G_k(\mathbb{R}^n)$	variété grassmanienne	[15]

Remarque 1.1
A part les exemples du tableau précédent, le spectre des formes des espaces $SO(n+2)/(SO(n) \times SO(2))$ et $Sp(n+1)/(Sp(n) \times Sp(1))$ a été calculé dans [46]. Le calcul de [15] en est une généralisation.

Les exemples de calcul du spectre du tableau précédent sont obtenus en utilisant la théorie des représentations des groupes de Lie compacts où nilpotents. Le fait que l'on travaille sur des espaces homogènes très concrètement donnés est crucial.

Notons que, à part les produits riemanniens et les tores plats, on n'a pas d'exemples de calcul explicite du spectre d'une famille continue, non-triviale de métriques.

Dans ce travail on commence la recherche des configurations géométriques générales susceptibles de supporter des méthodes qui permettraient d'enrichir, d'une manière uniforme, le tableau précédent. Notre point de vue consiste à essayer d'obtenir de nouveaux exemples de calcul du p-spectre à partir des exemples existants.

De manière générale, soit

$$F \hookrightarrow M \xrightarrow{p} N$$

une fibration (toutes les variétés sont, pour nous, compactes, connexes et orientées). Les métriques dont nous allons équiper M sont construites comme suit, à partir des métriques sur la base et sur la fibre. Soit H une connexion dans M, i.e. une décomposition ortho-gonale

$$TM = H \oplus V$$

où V est le fibré vertical (tangent à la fibre) de la fibration.
Si h est une métrique sur le fibré V et si g est une métrique sur $N, T > 0$, soit

$$g_T = h \oplus T^2 \cdot p^\star g.$$

Notons qu'on a obtenu une famille continue de métriques sur M telle que

$$p : (M, g_T) \to (N, g)$$

soit une submersion riemannienne. Notre objectif est alors d'obtenir des résultats du type suivant.

Principe de séparation des variables (PSV) :

> Exprimer le $p-$ spectre de (M, g_T) par le biais d'une famille de fonctions analytiques (algébriques) qui dépendent de T et des spectres de deux opérateurs sur V et H naturellement associés à notre situation géométrique.

On peut également formuler une question analogue au principe de séparation des variables pour les espaces propres de (M, g_T) relatifs aux p-formes.

Bien entendu, il faut d'abord décider s'il est possible d'établir un principe de séparation des variables. Ensuite, il faut identifier les opérateurs différentiels sur V et H et les fonctions algébriques (analytiques) qui expriment le spectre des formes de (M, g_T).

Nous allons maintenant donner quelques exemples où il est possible d'établir un principe de séparation des variables.

(i) Le cas où $M = (N, h) \times (F, T^2 g)$, un produit riemannien, est bien connu.

(ii) Concernant la p-valeur propre nulle il est possible (sous certaines hypothèses) d'exprimer son espace propre (le p-ième groupe de De Rham) en fonction des espaces propres (pour la valeur propre nulle) de la base et de la fibre. Ceci est le théorème de Leray-Hirsch ([9]).

(iii) Lorsque notre fibration est associée à une fibration principale, nous avons un principe de séparation des variables concernant le 0-spectre d'un certain type de métriques g_T ([2] et [7]).

Notons qu'une question dans le même esprit que le principe de séparation des variables, a été traitée dans [24] (voir aussi [23]). Les auteurs essaient de déterminer des parties du spectre des formes de l'espace total d'une submersion riemannienne en partant du spectre de la base. Le principe de départ est cependant très limité. On demande sous quelles conditions toute forme propre pour le laplacien de la base se relève dans une forme propre pour le laplacien de l'espace total. Comme les auteurs le démontrent, ceci n'a lieu que dans très peu de cas. Une meilleure approche est de demander qu'une forme propre de la base, sujette à certaines conditions, produise, via une application de plongement à détérminer, une forme propre (pas nécessairement horizontale) de l'espace total (voir le chapitre 4). C'est dans cet esprit que nous allons travailler par la suite, dans un contexte que nous préciserons.

Le résultat principal de notre travail consiste à établir un principe de séparation des variables dans le cas d'une fibration en cercles au-dessus d'une variété de Hodge. Nous procédons comme

suit.

En (2.1) nous donnons les formules qui relient le laplacien des formes au laplacien horizontal dans le cas d'une structure sous-riemannienne de codimension 1. Nous examinons les liens entre les différents opérateurs qui apparaissent naturellement dans ce contexte. Ce paragraphe sert de référence pour les diverses configurations géométriques que l'on peut imaginer en codimension 1 (structure de contact, espace fibré en cercles de courbure arbitraire). D'un point de vue technique, les formules de (2.1) montrent la nécéssité des conditions que nous imposerons par la suite.

Au paragraphe (2.2) nous nous plaçons dans le cadre suivant : M sera l'espace total d'une S^1-fibration principale au dessus d'une variété de Hodge N. La fibration sera munie d'une forme de connexion adaptée à la forme de Kähler de N. Dans ce contexte, on munit M de la famille de métriques riemanniennes $g_T, T > 0$ et on étudie le laplacien des formes de (M, g_T).

Notre configuration géométrique présente deux particularités importantes. La première, algébrique, est que l'endomorphisme antisymmétrique associé à la forme de courbure du fibré provient d'une structure complexe, ce qui donne lieu à des résultats de structure pour les formes, comme la décomposition de Lefschetz et la décomposition en bidegrées. La deuxième, géométrique, est que la forme de courbure de notre fibration est parallèle par rapport à la connexion de Lévi-Civita de la base (car la base est de Kähler).

Ceci entraine des formules de commutation simples entre les opérateurs différentiels qui jouent un rôle dans la décomposition du laplacien des formes de (M, g_T). Une partie des formules sont obtenues comme conséquences de celles de (2.1), d'autres sont démontrées dans ce contexte spécifique. Notons que ces formules sont les analogues de contact des identités kähleriennes classiques (voir [48]) et ont été démontrées de diverses manières dans [45], [42].

Nous avons essayé de les présenter d'un point de vue qui est à la fois ouvert à la généralisation et qui démontre l'utilité des hypothèses qu'on fait dans le reste de ce travail. Ce paragraphe est le point de départ pour la méthode que nous allons développer ; on y trouve répertoriées toutes les relations de commutation qui nous serviront par la suite.

En (2.3) nous rappelons quelques faits concernant les groupes de cohomologie de Dolbeault de la variété M. Il s'agit de résultats classiques de [45]. Nous insistons sur le fait que ces groupes peuvent être vus comme des espaces propres pour le laplacien horizontal Δ_H, pour la première valeur propre, qui est explicitement calculable (voir la proposition 2.3.1). Nous avons donc un objet géométrique qui produit du spectre pour un opérateur différentiel. Ce phénomène se reproduira également dans le cas du laplacien des formes de (M, g_T).

En (2.4) nous donnons l'analogue de la décomposition de Hodge d'une variété de Kähler dans notre cas. Let but est de répondre à une question naturelle qui se posera dès qu'on aura donné l'énoncé de notre théorème 4.2.1. On s'en servira également à des fins calculatoires dans (6.2).

Le chapitre 3 constitue l'étape technique de base de notre travail. Nous y étudions un espace de formes différentielles horizontales sujettes à certaines conditions. Cet espace apparaitra naturellement en (4.3). On procède en deux étapes, toutes deux essentielles par la suite. Nous commençons par obtenir des résultats de décomposition qui nous permettront de bien comprendre la structure de notre espace. Ensuite, on s'en sert pour montrer que l'espace qui nous intéresse produit de formes propres pour le laplacien des formes de (M, g_T).

Au chapitre 4 nous allons présenter et démontrer nos résultats principaux, ainsi que quelques conséquences immédiates.

En (4.1) nous introduisons les définitions et notations qui nous serviront à donner nos résultats.

Au paragraphe (4.2) nous présentons le principe de séparation des variables dans le contexte géométrique du paragraphe (2.2). D'abord, nous avons un résultat qui exprime, à isomorphisme près, les espaces propres du laplacien des formes de (M, g_T) en fonction des espaces propres du laplacien horizontal soumis à certaines restrictions. Il s'agit du théorème 4.2.1. Notons que nous avons des décompositions de nature légèrement différente pour les degré inférieurs, respectivement supérieurs à la moitié. Une conséquence immédiate en est l'expression des formes harmoniques de (M, g_T) en fonction de formes horizontales, résultat déjà connu par N. Tanaka ([45]). On en déduit également qu'en dimension 3 le spectre des fonctions de (M, g_T) et la cohomologie de Dolbeault de M déterminent le spectre des 1-formes de (M, g_T).

Le PSV que nous recherchons, contenu dans le théorème 4.2.2, est une conséquence immédiate du théorème 4.2.1. Il implique que le spectre des formes de (M, g_T) comporte deux parties :
• une partie qui s'exprime comme des fonctions algébriques de deux variables, universelles dans la catégorie de variétés que l'on considère, que l'on applique à T et au spectre du laplacien horizontal Δ_H^T en restriction à un certain espace.
• une partie **cohomologique**, dont les espaces propres sont produits par les groupes de cohomologie de Dolbeault. Les valeurs propres qui en font partie sont explicitement calculables, sont universelles dans la catégorie et ont comme multiplicités (dans la partie du spectre qui les concerne) les nombres de Betti-Dolbeault de M.

Notre résultat est complémentaire à celui de M. Rumin (voir [43]) qui se sert de la technique du commutateur, dans le cadre plus général des variétés de contact, pour déterminer la limite du spectre, respectivement de la trace du noyau de la chaleur pour le laplacien des formes de (M, g_T).

Nous avons donc mis en évidence une classe de variétés de contact (des fibrés au-dessus d'une variété de Hodge) où le comportement en T du spectre des formes est donné par des formules exactes.

En (4.3) nous allons essentiellement démontrer le résultat de décomposition annoncé au théorème 4.2.1. La technique consiste à montrer que pour une forme propre de Δ_{g_T} le bas de la décomposition de Lefschetz est toujours un élément d'un espace comme on en a étudié au chapitre 3. Ensuite on procède par récurrence en nous servant des particularités algébriques de la situation.

Le chapitre 5 contient des applications de nature générale du principe de séparation des variables dans le spectre de Δ_{g_T}, énoncé et démontré auparavant. Le fait que nous avons séparés les rôles des objets horizontaux et verticaux dans le spectre des formes de (M, g_T) nous permet d'envisager, en principe, de traiter tout problème relatif au comportement en T de ce spectre. Ainsi, en (5.1) nous présentons les applications que nous allons donner au principe de séparation des variables.

En (5.2) nous explicitons le spectre cohomologique de (M, g_T). Il s'agit de valeurs concrètes, universelles dans la classe de variétés que l'on a considérées. Nous donnons la positions de certaines valeurs du spectre cohomologique dans le spectre équivariant de (M, g_T).

Le problème des petites valeurs propres, pour notre classe de variétés, est étudié en (5.3). Nous donnons des expressions exactes et universelles des petites valeurs propres du laplacien

des formes de (M, g_T) lorsque $T \to 0$, ainsi que de leurs multiplicités. Ce résultat améliore, dans notre contexte, celui de [12]. Il se situe dans la ligne qui consiste à caractériser le bas du spectre des formes d'une variété à l'aide de sa géométrie et de sa topologie.

En (5.4) nous regardons dans un premier temps la limite du spectre de Δ_{g_T} lorsque $T \to 0$. Nous retrouvons, à l'aide des résultats de (4.2), la convergence de ce spectre vers le spectre de la base, déjà établie dans un cadre beaucoup plus général dans [36]. Ensuite, on donne des équivalents asymptotiques, à ordre arbitraire, de la trace du noyau de la chaleur de (M, g_T) lorsque $T \to 0$. Il s'agit, à notre connaissance, de résultats nouveaux.

Au paragraphe (5.5), on détermine la limite du spectre des formes de (M, g_T) lorsque $T \to \infty$. Nous mettons en évidence un phénomène d'effondrement du spectre en degré moitié. On calcule la limite de la première valeur propre des $2p+2$-formes de (M, g_T). Finalement, nous répondons à une question de Berger dans le cadre particulier de notre classe de variétés.

Les chapitres 6 et 7 contiennent des applications calculatoires du principe de séparation des variables. On s'appuie sur le fait que la connaissance du spectre du laplacien horizontal entraine la connaissance du spectre de Δ_{g_T} agissant sur les formes de M. Nous allons traiter les cas d'une classe de variétés de Heisenberg et des sphères de Berger.

En (6.1) nous rappelons quelques définitions et faits concernant les variétés de Heisenberg munies de métriques invariantes à gauche. On restreint notre étude à la classe de variétés de ce type qui entrent dans le contexte géométrique décrit en (2.2).

Au paragraphe (6.2) nous déterminons la partie du spectre du laplacien horizontal qui nous intéresse, en utilisant la connaissance du spectre des fonctions (cf. [26]) et les résultats de (2.4). Ensuite, on applique les résultats de (4.2) (théorème 4.2.2) pour obtenir le spectre des formes de la classe de variétés considérées.

Le chapitre 7 contient un calcul de nature différente comparé à celui du chapitre 6, dans la mesure où il n'est pas immédiat d'obtenir le spectre du laplacien horizontal.

En (7.1) nous décrivons la construction des métriques de Berger de la sphère S^{2r+1}, tout en remarquant qu'il s'agit d'un cas particulier de la configuration de (2.2).

Le paragraphe (7.2) est consacré au calcul du spectre équivariant de la sphère cano-nique. Nous commençons par donner une méthode plus simple (d'un point de vue technique) que celle de [19] pour obtenir le spectre de la sphère canonique, en nous servant de la description de l'espace des formes différentielles de la sphère donnée dans [35]. On en déduit le spectre équivariant de la sphère canonique.

En (7.3) nous commençons par déterminer le spectre du laplacien horizontal, en nous servant de la connaissance du spectre équivariant de la sphère canonique et du résultat de décomposition du théorème 4.2.1. Il s'agit donc d'une réciproque au fait que le spectre du laplacien horizontal détermine le spectre de Δ_{g_T} : le spectre équivariant de $\Delta_{g_{T_0}}, T_0 > 0$ fixé, détermine le spectre du laplacien horizontal. Nous donnons une formule de récurrence qui permet de calculer les multiplicités du spectre du laplacien horiozontal en fonction des multiplicités du spectre équivariant de la sphère canonique. Le spectre des sphères de Berger vient alors par application du principe de séparation des variables.

Dans l'annexe A, nous montrons comment on peut calculer les multiplicités du spectre, respectivement du spectre équivariant de la sphère canonique. Bien que ce ne soit pas un problème qui nous intéresse directement, on s'y penche pour compléter le calcul de (7.3). D'un côté, on voit que les formules de multiplicité de [19] sont éronnées. D'un autre côté, il n'est pas clair

pour nous que ces multiplicités puissent être déduites du travail (essentiellement algébrique) de [35].

L'annexe B essaye d'établir dans quels cas, sous les hypothèses du paragraphe (2.2), les méthodes de l'analyse harmonique sont applicables pour obtenir des calculs du spectre. On étudie donc le groupe des isométries de la famille (M, g_T). Des relations intéréssantes entre les champs de Killing de (M, g_T) et les 1-groupes de cohomologie de Dolbeault de M sont mises en evidence.

Chapitre 2

Préliminaires

Sommaire

2.1 La décomposition du Laplacien **9**
2.2 Le cas d'une fibration au-dessus d'une variété de Hodge **17**
2.2.1 Les opérateurs ∂_H et $\overline{\partial_H}$ 24
2.2.2 Formules de commutation polynômiales 26
2.3 Les espaces $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ **27**
2.4 La décomposition de Hodge des espaces propres de Δ_H^T **31**

2.1 La décomposition du Laplacien

Dans cette section nous nous plaçons dans la situation suivante. Soit (M^m, g) une variété riemannienne compacte, connexe et orientée. Supposons M munie d'un champ de vecteurs unitaire (par rapport à g), noté R. Notons V la distribution engendrée par R (qui sera appelée la distribution **verticale**) et H la distribution orthogonale à V (H sera appelée la distribution **horizontale**). On a alors la décomposition

2.1.1 $$TM = H \oplus V.$$

Cette décomposition a un analogue pour les formes différentielles. Posons d'abord la

Définition 2.1.1
Soit $p \geq 0$. L'espace des p-formes horizontales de M est

$$\Lambda^p(H) = \Lambda^p(M) \cap Ker(i_R)$$

où i_R désigne le produit intérieur par le champ R.

Soit $\theta \in \Lambda^1(M)$ la 1-forme associée à R via la métrique g. Nous allons démontrer l'existence de la décomposition :

2.1.2 $$\Lambda^p(M) = \Lambda^p(H) \oplus \Big[\Lambda^{p-1}(H) \wedge \theta\Big].$$

Bien que ce soit la conséquence d'un fait général d'algèbre linéaire, nous allons en donner la preuve qui nous servira d'ailleurs par la suite.

Démonstration :
Il suffit de voir que si $\alpha \in \Lambda^p(M)$ on a une écriture unique $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \wedge \theta$ avec $\alpha_1 \in \Lambda^p(H), \alpha_2 \in \Lambda^{p-1}(H)$. Si une telle écriture existe, par application de i_R, une antidérivation, on obtient que $\alpha_2 = (-1)^{p-1} i_R \alpha$ donc $\alpha_1 = \alpha + (-1)^p (i_R \alpha) \wedge \theta$. Les formes α_1 et α_2 étant horizontales, (2.1.2) est prouvée ■

Soit maintenant g_H la restriction de g à H. Nous munissons M d'une famille de métriques riemaniennes en posant pour $T > 0$

2.1.3 $$g_T = g_H + T^2 \cdot \theta \otimes \theta.$$

L'objectif de ce paragraphe est de calculer l'action du laplacien des formes différentielles de (M, g_T) sur la décomposition (2.1.2) (voir la proposition 2.1.4). Pendant les préliminaires qui nous conduiront à ce but, nous allons mettre en évidence et étudier les propriétés de plusieurs opérateurs différentiels propres à la structure sous-riemannienne que porte M (cf.(2.1.1)). Parmi les plus importants, citons la différentielle horizontale d_H introduite par la définition 2.1.3 ainsi que les laplaciens horizontaux $\Delta_H, \Delta_H^1, \Delta_H^2$ (cf. la définition 2.1.4). Ensuite, nous allons expliciter les commutateurs qui figurent dans notre première formule pour l'action de Δ_{g_T} sur la décomposition (2.1.2) (voir la formule (2.1.13)). Pour cela nous utilisons le lemme général 2.1.1 qui nous conduira au résultat final que contient la proposition 2.1.5.

Vu le caractère très général de ce paragraphe, il servira pour obtenir, dans un cas spécial, celui d'un fibré au-dessus d'une variété de Hodge, (voir la section 2.2) des renseignements plus précis sur le laplacien Δ_{g_T}. De façon heuristique, les résultats de cette section nous montreront à quel point le contexte géométrique de (2.2) est nécéssaire pour obtenir le principe de séparation des variables du chapitre 3.

Commençons par introduire les objets qui nous aideront à réaliser ce programme.

Définition 2.1.2
La **courbure** $b \in \Lambda^2(H)$ *de la distribution horizontale* H *est la composante horizontale (par rapport à la décomposition (2.1.2)) de la forme* $d\theta$ *.*

Remarque 2.1.1
On a

$$d\theta = b + \eta \wedge \theta$$

où η *est la* 1*-forme horizontale associée au champ horizontal* $-\nabla_R R$ *via la métrique* g_H *(*∇ *est la connexion de Lévi-Civita de* g *).*

Démonstration :
On a vu que $\eta = -i_R(d\theta)$. Soit $X \in \chi(H)$; alors $i_R(d\theta)X =< \nabla_R R, X > - < R, \nabla_X R >$. Mais $< \nabla_X R, R >= \frac{1}{2} X.||R||^2 = 0$ ■

La différentielle extérieure ne préserve pas l'espace des formes horizontales. Nous mesurons ce phénomène par la

Définition 2.1.3
La différentielle horizontale

$$d_H : \Lambda^p(H) \to \Lambda^{p+1}(M),\ p \geq 0$$

est l'opérateur qui à une p-forme horizontale α associe la partie horizontale de $d\alpha$.

L'opérateur d_H hérite de d les propriétés d'être d'ordre 1 et d'être une antidérivation.

On examine le lien entre les opérateurs d et d_H. Introduisons les opérateurs d'ordre 0

2.1.4
$$\begin{aligned} L &: \Lambda^q(H) \to \Lambda^{q+2}(H),\ L := \cdot \wedge b \\ S &: \Lambda^q(H) \to \Lambda^{q+1}(H),\ S := \eta \wedge \cdot \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{L}_R$ la dérivée de Lie dans la direction du champ R. Notons que l'espace des formes horizontales est préservé par cet opérateur. Alors nous avons :

Proposition 2.1.1
Par rapport à la décomposition (2.1.2) nous avons sur $\Lambda^p(M)$

2.1.5
$$d = \begin{pmatrix} d_H & (-1)^{p-1} \cdot L \\ (-1)^p \cdot \mathcal{L}_R & d_H + S \end{pmatrix}.$$

Démonstration :
Soit $\alpha + \beta \wedge \theta, \alpha \in \Lambda^p(H)$ et $\beta \in \Lambda^{p-1}(H)$. Alors

$$d(\alpha + \beta \wedge \theta) = d\alpha + d\beta \wedge \theta + (-1)^{p-1}\beta \wedge d\theta.$$

Comme

$$d\alpha = d_H\alpha + (-1)^p(i_R d\alpha) \wedge \theta = d_H\alpha + (-1)^p\mathcal{L}_R\alpha \wedge \theta$$

et de même,

$$d\beta = d_H\beta + (-1)^{p-1}\mathcal{L}_R\beta \wedge \theta$$

on conclut en utilisant le fait que $d\theta = b + \eta \wedge \theta$ ■

La formule (2.1.5) nous permet de dégager les premières propriétés de la différentielle horizontale. Tout d'abord, comme $d(d\theta) = 0$ on arrive par (2.1.5) à

$$d_H b = L\eta \text{ et } d_H\eta = -\mathcal{L}_R b.$$

Comme d_H est une antidérivation on obtient

2.1.6
$$[d_H, L] = LS \textit{ sur } \Lambda^\star(H).$$

On a aussi

2.1.7
$$[d_H, \mathcal{L}_\mathcal{R}] = -S\mathcal{L}_R \textit{ sur } \Lambda^\star(H).$$

Démonstration :
Par (2.1.5) nous avons pour $\alpha \in \Lambda^p(H)$:

$$d(\mathcal{L}_R\alpha) = d_H(\mathcal{L}_R\alpha) + (-1)^{p-1}\mathcal{L}_R^2\alpha \wedge \theta$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_R(d\alpha) &= \mathcal{L}_R(d_H\alpha + (-1)^{p-1}\mathcal{L}_R \wedge \theta) = \\ &= \mathcal{L}_R d_H\alpha + (-1)^{p-1}\mathcal{L}_R^2\alpha \wedge \theta + (-1)^{p-1}\mathcal{L}_R\alpha \wedge \mathcal{L}_R\theta.\end{aligned}$$

Compte tenu de $[d, \mathcal{L}_R] = 0$ on trouve $[d_H, \mathcal{L}_R]\alpha = (-1)^p\mathcal{L}_R\alpha \wedge \mathcal{L}_R\theta$. Mais

$$\mathcal{L}_R\theta = i_R d\theta = i_R(b + \eta \wedge \theta) = i_R(\eta \wedge \theta) = -\eta$$

ce qui nous permet de conclure ■

Une identité importante relative à la différentielle horizontale est le calcul de son carré.

Proposition 2.1.2
Nous avons

2.1.8 $$d_H^2 = -L\mathcal{L}_R \text{ sur } \Lambda^\star(H)$$

Démonstration :
C'est une conséquence du fait que $d^2 = 0$. Soit $\alpha \in \Lambda^p(H)$. Par (2.1.5), on a successivement :

$$\begin{aligned}&d(d\alpha) = d(d_H\alpha + (-1)^p\mathcal{L}_R\alpha \wedge \theta) = \\ &= d(d_H\alpha) + (-1)^p(d(\mathcal{L}_R\alpha) \wedge \theta + (-1)^q\mathcal{L}_R\alpha \wedge d\theta) = \\ &= d_H^2\alpha + (-1)^{p+1}\mathcal{L}_R(d_H\alpha) \wedge \theta + (-1)^p(d_H(\mathcal{L}_R\alpha) \wedge \theta + (-1)^p\mathcal{L}_R\alpha \wedge d\theta) = \\ &= d_H^2\alpha + (-1)^p[d_H, \mathcal{L}_R]\alpha \wedge \theta + \mathcal{L}_R\alpha \wedge d\theta.\end{aligned}$$

Or $[d_H, \mathcal{L}_R] = -S\mathcal{L}_R$ par (2.1.7) et

$$\mathcal{L}_R\alpha \wedge d\theta = \mathcal{L}_R\alpha \wedge (b + \eta \wedge \theta) = (L\mathcal{L}_R)\alpha + (-1)^p(S\mathcal{L}_R)\alpha \wedge \theta.$$

Finalement $d(d\alpha) = d_H^2\alpha + (L\mathcal{L}_R)\alpha$ et on conclut par $d^2 = 0$ ■
Par conséquent, lorsque $b \neq 0$, d_H n'est pas une différentielle exacte.

Nous allons maintenant introduire la codifférentielle horizontale. Faisons la convention suivante : si $D : \Lambda^\star(H) \to \Lambda^\star(H)$ est un opérateur différentiel, nous notons $D^\star$ son adjoint formel par rapport à la métrique g_H et à la forme volume de la métrique g, notée μ_g ; on peut également intégrer par rapport à μ_{g_T}, la forme volume de $g_T, T > 0$ fixé, car μ_{g_T} est proportionelle à μ_g. Nous démontrons alors :

Proposition 2.1.3
L'identité

2.1.9 $$d_{g_T}^\star = \begin{pmatrix} d_H^\star & \frac{(-1)^{p-1}}{T^2} \cdot \mathcal{L}_R^\star \\ (-1)^p T^2 \cdot L^\star & d_H^\star + S^\star \end{pmatrix}$$

est valable sur $\Lambda^p(M)$, par rapport à la décomposition (2.1.2).

Démonstration :
Désignons par $< \cdot, \cdot >$ la métrique g_T. Soit $\alpha \in \Lambda^p(H)$ et $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \wedge \theta \in \Lambda^{p-1}(M)$ avec $\gamma_1 \in \Lambda^{p-1}(H)$ et $\gamma_2 \in \Lambda^{p-2}(H)$. Alors :

$$\int_M < d^\star_{g_T}\alpha, \gamma > \mu_{g_T} = \int_M < \alpha, d\gamma > \mu_{g_T} = \int_M < \alpha, d_H\gamma_1 + (-1)^p L\gamma_2 > \mu_{g_T} +$$

$$+ \int_M < \alpha, \left[(-1)^{p-1}\mathcal{L}_R\gamma_1 + (d_H + S)\gamma_2\right] \wedge \theta > \mu_{g_T}.$$

Le deuxième produit scalaire étant nul ($\Lambda^p(H)$ et $\Lambda^{p-1}(H) \wedge \theta$ sont orthogonaux pour g_T) on doit calculer seulement la première intégrale.

$$\int_M < \alpha, d_H\gamma_1 + (-1)^p L\gamma_2 > \mu_{g_T} = \int_M < d^\star_H\alpha, \gamma_1 > \mu_{g_T} + (-1)^p \int_M < L^\star\alpha, \gamma_2 > \mu_{g_T} =$$

$$= \int_M < d^\star_H\alpha, \gamma_1 > \mu_{g_T} + (-1)^p T^2 \int_M < L^\star\alpha \wedge \theta, \gamma_2 \wedge \theta > \mu_{g_T}$$

car le champ associé à θ via g_T est $\frac{1}{T^2}R$. De nouveau, par l'orthogonalité de $\Lambda^{p-1}(H)$ et $\Lambda^{p-2}(H) \wedge \theta$, on obtient

$$\int_M < d^\star_{g_T}\alpha, \gamma > \mu_{g_T} = \int_M < d^\star_H\alpha + (-1)^p T^2 L^\star\alpha \wedge \theta, \gamma > \mu_{g_T}.$$

La forme γ étant arbitraire, la formule est prouvée sur $\Lambda^p(H)$. Il nous reste à démontrer (2.1.9) sur $\Lambda^{p-1}(H) \wedge \theta$. La preuve sera omise car identique à ce qu'on a vu ci-dessus ■

Par passage à l'adjoint dans (2.1.6)-(2.1.8) (c'est à dire en appliquant le même genre de raisonnement que dans la preuve de la proposition précédente) on établit les identités

2.1.10 $$[d^\star_H, L^\star] = -S^\star L^\star$$

2.1.11 $$[d^\star_H, \mathcal{L}^\star_R] = \mathcal{L}^\star_R S^\star$$

2.1.12 $$(d^\star_H)^2 = -\mathcal{L}^\star_R L^\star$$

valables sur $\Lambda^\star(H)$. Notons que $S^\star = i_{\nabla_R R}$.

En nous servant des opérateurs d_H et $d^\star_H$, on peut former, en analogie avec le cas riemannien standard, plusieurs types de laplaciens.

Définition 2.1.4
Les opérateurs $\Delta_H, \Delta^1_H, \Delta^2_H : \Lambda^p(H) \to \Lambda^p(H)$ *définis par*

$$\Delta_H = d_H d^\star_H + d^\star_H d_H$$
$$\Delta^1_H = \Delta_H + \tfrac{1}{T^2}\mathcal{L}^\star_R\mathcal{L}_R$$
$$\Delta^2_H = \Delta_H + \tfrac{1}{T^2}\mathcal{L}_R\mathcal{L}^\star_R.$$

seront appelés laplaciens horizontaux.

Il s'agit d'opérateurs d'ordre 2, positifs et autoadjoints.

Il nous est maintenant possible de donner une première formule pour l'action de Δ_{g_T} sur la décomposition (2.1.2). Notons que les laplaciens horizontaux Δ_H^1 et Δ_H^2 y apparaissent naturellement .

Proposition 2.1.4
Nous avons sur $\Lambda^p(M)$

$$\Delta_{g_T} = \begin{pmatrix} \Delta_H^1 + T^2 LL^\star & (-1)^p D^\star + \frac{(-1)^p}{T^2} P^\star \\ (-1)^p T^2 D + (-1)^p P & \Delta_H^2 + T^2 L^\star L + Q \end{pmatrix} \tag{2.1.13}$$

où les opérateurs D, P, Q sont définis par

$$D = [d_H, L^\star] + SL^\star, P = [d_H^\star, \mathcal{L}_R] + S^\star \mathcal{L}_R$$
$$Q = \{S^\star, d_H\} + \{S, d_H^\star\} + \{S^\star, S\}$$

et $\{\cdot,\cdot\}$ désigne l'anticommutateur.

Démonstration :
Elle consiste à faire la multiplication formelle des matrices qui apparaissent dans (2.1.5) et (2.1.9) en faisant attention au degré des formes ■

Corollaire 2.1.1
Les opérateurs Δ_H^1 et Δ_H^2 sont elliptiques.

Démonstration :
Lorsque D est un opérateur différentiel d'ordre 2, son symbole principal d'ordre 2 sera désigné par σ_D^2.
Par (2.1.13) l'opérateur Δ_H^1 s'exprime comme la somme de la restriction de Δ_{g_T} à $\Lambda^\star(H)$ et d'opérateurs d'ordre inférieur ou égal à 1. Par conséquent

$$\sigma^2_{\Delta_H^1} = \sigma^2_{\Delta_{g_T}|\Lambda^\star(H)} : T^\star M \to End(\Lambda^\star(H)), \sigma^2_{\Delta_H^1}(\zeta) = -\|\zeta\|^2_{g_T}.$$

Ainsi Δ_H^1 est elliptique, de même que Δ_H^2, son adjoint ■

Remarque 2.1.2
Δ_H n'est pas un opérateur elliptique. Cependant, lorsque M est une variété de contact, H la distribution de contact et R le champ de Reeb associé, il a été démontré dans [42] qu'il s'agit d'un opérateur hypoelliptique.

Dans le reste de cette section nous allons essayer de donner une expression plus simple aux opérateurs D et Q qui apparaissent dans la formule (2.1.13). Nous aurons besoin du lemme technique suivant.

Lemme 2.1.1
Soit (N^n, g) une variété riemannienne connexe et $\omega \in \Lambda^2(N)$. Soit G l'endomorphisme associé à ω via g : $\omega = <\cdot, G\cdot>$ et $L : \Lambda^q(N) \to \Lambda^{q+2}(N)$ la multiplication extérieure par ω (cette notation est abusive ; à ne pas confondre avec (2.1.4)). On a alors pour $\alpha \in \Lambda^q(N)$

2.1.14 $$[d^\star, L]G\alpha = -Gd\alpha - G^1\alpha + (-1)^q G\alpha \wedge d^\star\omega$$

où $G^1 : \Lambda^q(N) \to \Lambda^{q+1}(N)$ *est l'unique morphisme de fibrés vectoriels qui vérifie :*

(i) $G^1(\beta \wedge \gamma) = (-1)^p G\beta \wedge G^1\gamma + G^1\beta \wedge G\gamma,\ \beta \in \Lambda^p(N), \gamma \in \Lambda^r(N)$

(ii) $G^1(f) = 0, f \in C^\infty(N)$

(iii) $G^1(\alpha) = i_X\Big[d^\star\omega \wedge \omega - \frac{1}{2}d^\star(\omega \wedge \omega)\Big], \alpha \in \Lambda^1(N), \alpha =< \cdot, X > .$

Démonstration :
Vérifions d'abord que $[d^\star, L]G + Gd$ est un opérateur d'ordre 0. Soit $(f, \alpha) \in C^\infty(N) \times \Lambda^q(N)$. Alors

$$\begin{aligned}&([d^\star, L]G + Gd)(f\alpha) = [d^\star, L](fG\alpha) + G(fd\alpha + df \wedge \alpha) = \\ &= d^\star(fLG\alpha) - Ld^\star(fG\alpha) + fGd\alpha + G(df) \wedge G\alpha.\end{aligned}$$

Nous allons utiliser la formule (voir [14])

$$d^\star(h\beta) = hd^\star\beta - i_{grad\ h}\beta,\ (h, \beta) \in C^\infty(N) \times \Lambda^\star(N).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}&([d^\star, L]G + Gd)(f\alpha) = f(d^\star L)G\alpha - i_{grad\ f}LG\alpha - fL(d^\star G\alpha) + \\ &+L(i_{grad\ f}G\alpha) + fGd\alpha + G(df) \wedge G\alpha.\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}&i_{grad\ f}L(G\alpha) = i_{grad\ f}(G\alpha \wedge \omega) = i_{grad\ f}G\alpha \wedge \omega + (-1)^p G\alpha \wedge i_{grad\ f}\omega = \\ &= L(i_{grad\ f}G\alpha) + (-1)^q G\alpha \wedge G(df),\end{aligned}$$

(car $i_{grad\ f}\omega = G(df)$) on arrive à

$$([d^\star, L]G + Gd)(f\alpha) = f([d^\star, L]G + Gd)\alpha$$

ce qui montre bien que notre opérateur est d'ordre 0.

Soit $x \in N$ et $\{e_i\}_{i=1,n}$ un repère orthonormé local au voisinage de x qui soit géodésique en x, c'est à dire que $(\nabla_{e_i}e_j)_x = 0,\ i, j = \overline{1, n}$. Rappelons qu'au point x on a

2.1.15 $$\begin{aligned}d &= \sum_{i=1}^n e^i \wedge \nabla_{e_i} \\ d^\star &= -\sum_{j=1}^n i_{e_j}\nabla_{e_j}\end{aligned}$$

(voir par exemple [14]). Désormais tous nos calculs seront faits au point x. Soit $\alpha \in \Lambda^q(N)$.

$$[d^\star, L]G\alpha = d^\star(G\alpha \wedge \omega) - d^\star(G\alpha) \wedge \omega = \sum_{i=1}^n (i_{e_i}\nabla_{e_i}G\alpha) \wedge \omega - i_{e_i}\nabla_{e_i}(G\alpha \wedge \omega).$$

Mais $i_{e_i}\nabla_{e_i}(G\alpha \wedge \omega) = i_{e_i}(\nabla_{e_i}G\alpha \wedge \omega + G\alpha \wedge \nabla_{e_i}\omega) = (i_{e_i}\nabla_{e_i}\alpha) \wedge \omega + (-1)^q\nabla_{e_i}G\alpha \wedge i_{e_i}\omega + i_{e_i}G\alpha \wedge \nabla_{e_i}\omega + (-1)^q G\alpha \wedge i_{e_i}\nabla_{e_i}\omega$ ce qui fait que

$$[d^\star, L]G\alpha = -K\alpha + (-1)^q G\alpha \wedge d^\star\omega$$

où l'on a posé $K\alpha = \sum_{i=1}^{n}(-1)^q \nabla_{e_i} G\alpha \wedge i_{e_i}\omega + i_{e_i} G\alpha \wedge \nabla_{e_i}\omega$. Comme le produit intérieur est une antidérivation on s'assure sans peine que

$$K(\beta \wedge \gamma) = K\beta \wedge G\gamma + (-1)^p G\beta \wedge K\gamma,\ \beta \in \Lambda^p(N), \gamma \in \Lambda^r(N).$$

Sachant que $K - Gd$ est d'ordre 0, il nous suffit maintenant de démontrer la formule (2.1.14) pour $q = 0, 1$. Si f est une fonction sur N alors

$$[d^\star, L]Gf = d^\star(f\omega) = fd^\star\omega - i_{gradf}\omega = fd^\star\omega - Gdf$$

donc $G^1 f = 0$. Si $\alpha =< \cdot, X >$ est une 1-forme notons d'abord que $\nabla_Y(G\alpha) = G\nabla_Y\alpha + i_X\nabla_Y\omega$ pour tout champ $Y \in \chi(N)$. Par ce fait on arrive à $K\alpha = Gd\alpha - i_X \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\omega \wedge i_{e_i}\omega$. Comme $\nabla_{e_i}\omega \wedge i_{e_i}\omega = i_{e_i}(\nabla_{e_i}\omega \wedge \omega) - (i_{e_i}\nabla_{e_i}\omega) \wedge \omega = \frac{1}{2} i_{e_i}\nabla_{e_i}(\omega \wedge \omega) - (i_{e_i}\nabla_{e_i}\omega) \wedge \omega$ on obtient par (2.1.15) :

$$K\alpha = Gd\alpha - \frac{1}{2}d^\star(\omega \wedge \omega) + (d^\star\omega) \wedge \omega.$$

On conclut en utilisant la définition de K ■

Remarquons que la formule précédente est l'analogue des identités de Hodge sur une variété kählerienne. On s'en sert pour obtenir des renseignements sur le commutateur $[d_H^\star, L]$ comme suit. Soit $F \in End(H)$ l'endomorphisme antisymétrique associé à la forme b via g_H.

Proposition 2.1.5
On a pour $\alpha \in \Lambda^q(H)$ (ici L est l'opérateur donné en (2.1.4)) :

2.1.16 $$[d_H^\star, L]F\alpha = -Fd_H\alpha - F^1\alpha + (-1)^q F\alpha \wedge d_H^\star b$$

où $F^1 : \Lambda^q(H) \to \Lambda^{q+1}(H)$ est l'unique morphisme de fibrés vectoriels qui satisfait à

(i) $F^1(\beta \wedge \gamma) = (-1)^p F\beta \wedge F^1\gamma + F^1\beta \wedge F\gamma,\ \beta \in \Lambda^p(H), \gamma \in \Lambda^r(H)$

(ii) $F^1(f) = 0$

(iii) $F^1(\alpha) = i_X\left[d_H^\star b \wedge b - \frac{1}{2}d_H^\star(b \wedge b)\right], \alpha \in \Lambda^1(H), \alpha =< \cdot, X >$.

Démonstration :
On applique le lemme 2.1.1 pour (M, g) (donc $T = 1$ car $g_1 = g$) et pour la forme b. Alors $G \in End(TM)$ est défini par $G_{|H} = F, G_{|V} = 0$. Par conséquent $G_{|\Lambda^\star(H)} = F$ et $G_{\Lambda^\star(H)\wedge\theta} = 0$. Compte tenu de (2.1.4) on obtient lorsque $\alpha \in \Lambda^q(H)$

$$[d_g^\star, L]F\alpha = -Gd\alpha - G^1\alpha + (-1)^q F\alpha \wedge d_g^\star b.$$

Or (2.1.9) entraîne que $[d_g^\star, L]F\alpha = [d_H^\star, L]F\alpha + (-1)^q[L^\star, L](F\alpha) \wedge \theta$. D'un autre coté, par (2.1.5) on obtient $G(d\alpha) = G(d_H\alpha + (-1)^q\mathcal{L}_R\alpha \wedge \theta) = Fd_H\alpha$. Donc

$$[d_H^\star, L]F\alpha + (-1)^q[L^\star, L](F\alpha) \wedge \theta = -Fd_H\alpha - G^1\alpha + (-1)^q F\alpha \wedge d_g^\star b.$$

Nous avons maintenant à identifier les parties horizontales de l'égalité précédente. Décomposons, à l'aide de (2.2.1), $G^1 : \Lambda^q(H) \to \Lambda^{q+1}M$ comme $G^1 = F^1 + F^2 \wedge \theta$ où

$$F^1 : \Lambda^q(H) \to \Lambda^{q+1}(H),\ F^2 : \Lambda^q(H) \to \Lambda^q(H)$$

sont des morphismes de fibrés vectoriels. Comme $d_g^\star b = d_H^\star b + L^\star b \cdot \theta$ on trouve que

$$[d_H^\star, L]F\alpha = -Fd_H\alpha - F^1\alpha + (-1)^q F\alpha \wedge d_H^\star b.$$

$G_{|\Lambda^\star H}$ vérifie (i) donc il en est de même pour F^1. Comme $F^1 \equiv 0$ sur $C^\infty(M)$, il nous reste à voir que F^1 vérifie (iii). Considérons $\beta =< \cdot, X > \in \Lambda^1(H)$. Alors $G^1(\beta) = i_X\Big[d_g^\star b \wedge b - \frac{1}{4}d_g^\star(b\wedge b)\Big]$. Or $d_g^\star(b\wedge b) = d_H^\star(b\wedge b) + L^\star(b\wedge b)\wedge\theta$ et $d_g^\star(b) = d_H^\star(b) + L^\star(b)\cdot\theta$ ce qui entraine que

$$\begin{aligned} G^1(\beta) &= i_X\Big[d_H^\star(b)\wedge b - \tfrac{1}{2}d_H^\star(b\wedge b)\Big] + i_X\Big[(L^\star b\cdot b - \tfrac{1}{2}L^\star(b\wedge b))\wedge\theta\Big] \\ &= i_X\Big[d_H^\star(b)\wedge b - \tfrac{1}{2}d_H^\star(b\wedge b)\Big] + \Big[i_X(L^\star b\cdot b - \tfrac{1}{2}L^\star(b\wedge b))\Big]\wedge\theta \end{aligned}$$

par l'horizontalité de X. On a bien montré que $F^1\beta = i_X\Big[d_H^\star b\wedge b - \frac{1}{2}d_H^\star(b\wedge b)\Big]$ ■

Notons que cette formule a été déjà établie, lorsque M est une variété de contact, dans [43]. Concernant l'opérateur Q il est immédiat de constater que

$$-Q = \mathcal{L}_{\nabla_R R} + \mathcal{L}^\star_{\nabla_R R} - ||\nabla_R R||^2.$$

Il s'agit donc d'un opérateur d'ordre 0. Comme dans les cas qui vont nous intéresser par la suite cet opérateur sera identiquement nul, nous n'allons pas plus loin dans son étude.

2.2 Le cas d'une fibration au-dessus d'une variété de Hodge

Dans ce paragraphe on présente le contexte géométrique dans lequel nous allons établir le principe de séparation des variables. C'est un cas particulier de la situation discutée au paragraphe précédent dont nous allons étudier les propriétés spécifiques.

Concrètement, on va se placer dans la situation suivante. (N^{2r}, h, J) sera une variété de Kähler, compacte et connexe. Soit $\omega \in \Lambda^2(N)$ la forme de Kähler de N, $\omega(X,Y) = h(X, JY)$. Rappelons que ω est parallèle pour la connexion de Levi-Civita de h, donc fermée. Nous allons supposer que N est de Hodge, c'est à dire que la classe $[\omega]$ est un multiple non nul d'une classe entière dans $H^2(N,\mathbb{Z})$. Quitte à renormaliser la métrique h et à changer J en $-J$, on peut supposer que la classe $[\omega]$ est entière.

Soit maintenant $S^1 \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} N$ le fibré principal dont la première classe de Chern est égale à $[\omega]$. L'existence et l'unicité (à isomorphisme près) de cette fibration est garantie par le fait que la première classe de Chern réalise un isomorphisme entre les classes d'isomorphisme de fibrés principaux en cercles et $H^2(N,\mathbb{Z})$.

Choisissons $\theta \in \Lambda^1(M,\mathbb{R})$ une forme de connexion principale **adaptée** à la forme de Kähler de N i.e. telle que

$$d\theta = \pi^\star\omega.$$

Soit $H = Ker\theta$ la distribution horizontale associée à θ et soit $R \in \chi(M)$ le champ induit par l'action du cercle.

Remarque 2.2.1
(i) (M, θ) est une variété de contact ; c'est également une variété fortement pseudo-convexe au sens de [45].
(ii) L'espace des formes horizontales ne dépend pas de la forme de connexion qu'on choisit dans notre fibré. La connexion est nécessaire pour obtenir la décomposition (2.1.2).

Pour $T > 0$, on munit M des métriques g_T définies au paragraphe 2.1. On obtient une famille de submersions riemanniennes à fibres totalement géodésiques,

$$(M, g_T) \xrightarrow{\pi} (N, h).$$

Remarque 2.2.2
Tout autre forme de connexion θ_1 adaptée à ω s'écrit $\theta_1 = \theta + \pi^\star\alpha$ avec $\alpha \in \Lambda^1(N)$ fermée. Donc, a priori, les métriques g_T dépendent du choix de θ. Pour les classes d'isométrie de ces métriques et autres informations complémentaires voir l'annexe B.

Le but de cette section est d'analyser, dans la situation décrite ci-dessus, les liens entre les différents opérateurs qui apparaissent dans la décomposition de Δ_{g_T} (voir (2.1.13)). Toutes les formules de commutation qui nous seront nécéssaires dans la suite de notre travail y figurent. On va exploiter les nombreuses particularités de notre configuration géométrique comme suit. Nous commençons par rappeler des faits sur la structure algébrique de $\Lambda^\star(M)$: la décomposition de Lefchetz, la bigraduation complexe et les liens existants entre les deux. Ensuite, nous voulons voir ce que devient la formule (2.1.13), qui donne l'action du laplacien sur la décomposition (2.1.2), dans notre cas. A cet effet, nous obtenons d'abord, à partir de la proposition 2.1.5 les formules fondamentales (2.2.15)-(2.2.16) qui décrivent les commutateurs $[d_H, L^\star]$ et $[d_H^\star, L]$. On en déduit la formule pour la décomposition du laplacien Δ_{g_T} donnée en (2.2.19). Il s'agit d'adapter à notre géométrie la formule (2.1.13) ; elle en sortira considérablement simplifiée. Nous faisons ensuite quelques préparatifs qui conduiront à la preuve de l'identité $(Jd_H)^2 = (d_H J)^2$ (voir (2.2.24)), qui est d'une importance vitale pour nous : elle entraine que la décomposition de Lefschetz et la bigraduation complexe de $\Lambda^\star(H)$ sont préservés par le laplacien horizontal. Ensuite, à l'aide des formules établies précédemment, nous étudions les différentielles complexes $\partial_H, \overline{\partial_H}$, qui seront définies au paragraphe 2.2.1 et les laplaciens qui leurs sont associés. Finalement, au paragraphe 2.2.2 quelques formules utiles pour la suite seront donnés.

Nous procédons maintenant à la réalisation de ce programme.

Par construction, les métriques $g_T,\ T > 0$, sont invariantes par l'action du cercle. On utilise l'action de S^1 pour étudier l'espace des formes de M. Pour $z \in S^1$ soit $R_z : M \to M$ la translation associée à z. Sauf spécification contraire, on va toujours travailler avec des formes différentielles à valeurs complexes.

Définition 2.2.1
*Soit $q \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$. On définit l'espace des q-formes k-***équivariantes** *par*

2.2.1 $$\Lambda_k^q(M) = \{\alpha \in \Lambda^q(M) : R_z^\star\alpha = z^k \cdot \alpha \ \ \forall\, z \in S^1\}$$

Notons que la dérivée de Lie $\mathcal{L}_R$ agit sur $\Lambda^q_k(M)$ par multiplication avec ik et que ces espaces sont invariants par l'action du cercle. On a aussi

2.2.2
$$\begin{array}{l} \Lambda^q_k(M) \textit{ sont des sous-espaces fermées dans } L^2(\Lambda^q(M)); \\ L^2(\Lambda^q(M)) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Lambda^q_k(M), \textit{ somme directe d'espaces de Hilbert.} \end{array}$$

La complétion L^2 peut être prise par rapport à toute métrique du type g_T.

De (2.2.2) nous déduisons que $\mathcal{L}_R$ est un opérateur antisymétrique :

2.2.3
$$\mathcal{L}^\star_R + \mathcal{L}_R = 0.$$

On peut également définir les espaces des formes différentielles horizontales et équivariantes en posant pour $q \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$

2.2.4
$$\Lambda^q_k(H) = \Lambda^q(H) \cap \Lambda^q_k(M).$$

Ces espaces héritent de toutes les propriétés des espaces $\Lambda^q_k(M)$ et satisfont en plus une décomposition (2.1.2) de type équivariant.

Une autre particularité algébrique importante de la situation géométrique considérée est liée à la forme de Kähler de (N, g, J). Soit L l'opérateur d'ordre 0 défini en (2.1.4) (ici $b = \pi^\star\omega$). La propriété la plus importante de L est

2.2.5
$$[L^\star, L] = (r-q)1_{\Lambda^q(H)}$$

(voir [25], page 172). Elle donne lieu à la notion suivante.

Définition 2.2.2
Une q-forme horizontale est **primitive** *ssi $L^\star\alpha = 0$. L'espace de ces formes sera noté par $\mathcal{S}^q$.*

Notons qu'il n' y a pas de formes primitives en degré supérieur à r i.e.

$$\mathcal{S}^q = 0, q > r$$

et que $\mathcal{S}^r = Ker\ L$ (voir [25], page 180). Comme on va s'en servir constamment au chapitre 4, énonçons les versions itérées de (2.2.5).

2.2.6
$$\begin{array}{l} [L^\star, L^s] = s(r-q-s+1)(L)^{s-1} \\ [(L^\star)^s, L] = s(r-q+s-1)(L^\star)^{s-1} \quad \textit{sur } \Lambda^q(H), s \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Une autre conséquence de (2.2.5) est

2.2.7
$$L^{q+1}\mathcal{S}^{r-q} = 0 \textit{ pour } 0 \leq q \leq r.$$

Démonstration :
Soit $\alpha \in \mathcal{S}^{r-q}$. Alors $\|L^{q+1}\alpha\|^2 =< L^\star L^{q+1}\alpha, L^q\alpha >$. Or par (2.2.6) et le fait que α est primitive, nous avons que $L^\star L^{q+1}\alpha = 0$ ■

Ces identités sont la source de la décomposition de **Lefschetz** de l'algèbre des formes horizontales que nous rappelons maintenant (voir [25], page 180).

2.2.8

$$\Lambda^{2p+2}(H) = \begin{cases} \mathcal{S}^{2p+2} \oplus \bigoplus_{s=0}^{p} L^{s+1}\mathcal{S}^{2(p-s)} \text{ si } p \leq [\frac{r}{2}] - 1 \\ \bigoplus_{s=2p+1-r}^{p} L^{s+1}\mathcal{S}^{2(p-s)} \text{ si } [\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1 \end{cases}$$

$$\Lambda^{2p+1}(H) = \begin{cases} \bigoplus_{s=0}^{p} L^{s}\mathcal{S}^{2(p-s)+1} \text{ si } p \leq [\frac{r}{2}] - 1 \\ \bigoplus_{s=2p+1-r}^{p} L^{s}\mathcal{S}^{2(p-s)+1} \text{si } [\frac{r}{2}] \leq p \leq r. \end{cases}$$

Tous les faits ci-dessus ont des analogues équivariants. Ceci est dû au fait que

2.2.9 $$[L, \mathcal{L}_R] = 0 \text{ sur } \Lambda^\star(H)$$

(c'est une conséquence du fait que $\mathcal{L}_R\pi^\star\omega = 0$, car $\pi^\star\omega$ est fermée et horizontale). On pose

Définition 2.2.3
Pour $0 \leq q \leq r$ et $k \in \mathbb{Z}$ soit $\mathcal{S}_k^q$ l'espace des q-formes primitives et k-équivariantes.

L'algèbre $\Lambda^\star(H)$ possède une bigraduation donnée par la structure complexe J qu'on rappelle maintenant. Soit $\mathcal{J} : \Lambda^q(H) \to \Lambda^q(H)$ l'endomorphisme défini par

$$\mathcal{J}(\alpha)(v_1, \ldots, v_q) := \sum_{j=1}^{q} \alpha(v_1, \ldots, Jv_j, \ldots, v_q) \text{ si } q \geq 1.$$

Sur $C^\infty(M)$ on pose $\mathcal{J} \equiv 0$.
Nous avons

2.2.10 $$\mathcal{J} \text{ est une dérivation de } \Lambda^\star(H) \text{ et } \mathcal{J} \equiv J \text{ sur } \Lambda^1(H).$$

La preuve de ce résultat est un simple exercice d'algèbre linéaire. Notons que ces propriétés déterminent complétement $\mathcal{J}$. Le spectre de J étant $\pm i$ on obtient que les valeurs propres de $\mathcal{J}$ sur $\Lambda^q(H)$ sont de la forme $i(t-p), t+p = q$. Les espaces propres correspondants seront notés $\Lambda^{t,p}(H)$. Ces espaces ont des analogues équivariants, notés $\Lambda_k^{t,p}(H)$ par le fait que

2.2.11 $$[\mathcal{J}, \mathcal{L}_R] = 0$$

(découle de (2.2.10) et de $[J, \mathcal{L}_R] = 0$). Nous avons également des espaces de formes du type (t, p) qui sont primitives resp. primitives et équivariantes et qui seront notés $\mathcal{S}^{t,p}$ resp. $\mathcal{S}_k^{t,p}$. Ceci est dû à l'identité

2.2.12 $$[L, \mathcal{J}] = 0$$

déduite de (2.2.10) et de $[L, J] = 0$. Pour les espaces $\Lambda^{t,p}(H)$ nous avons une décomposition de Lefschetz analogue à (2.2.8). Il faut toutefois noter que L envoie une (t, p)-forme sur une $(t+1, p+1)$-forme.

Remarque 2.2.3
L'endomorphisme $\mathcal{J}$ va apparaitre naturellement dans la formule de Weitzenböck pour le laplacien horizontal (voir l'annexe B).

On passe maintenant à l'étude des opérateurs différentiels asssociés à la distribution H. Dans un premier temps, on va donner une expression plus simple pour (2.1.13) en particularisant à notre cas les résultats obtenus dans la section 1.

Nous notons ∇^T la connexion de Levi-Civita pour la métrique g_T. Alors

2.2.13 $$\nabla^T_R R = 0$$

(voir [6]) Par conséquent, l'opérateur S défini en (2.1.4) est nul, donc aussi Q. Les formules (2.2.3) et (2.1.7) entrainent alors que l'opérateur P est également nul. Nous étudions maintenant le commutateur $[d_H, L^\star]$. Notons d'abord que

2.2.14 $$\begin{array}{l} d_H(\pi^\star\alpha) = \pi^\star(d\alpha) \\ d^\star_H(\pi^\star\alpha) = \pi^\star(d^\star_h\alpha)) \end{array}, \alpha \in \Lambda^q(N).$$

Démonstration :
La première affirmation est évidente. Montrons la deuxième. Comme S^1 agit par isométrie sur (M, g_T) l'action de S^1 préserve $d^\star_{g_T}$ donc $d^\star_H$ par (2.1.9). Il existe alors $\beta \in \Lambda^{q-1}(N)$ telle que $d^\star_H(\pi^\star\alpha) = \pi^\star\beta$. Soit maintenant $\gamma \in \Lambda^{q-1}(N)$. Nous avons :

$$\int_M < \pi^\star\beta, \pi^\star\gamma > \mu_{g_T} = \int_M < d^\star_H(\pi^\star\alpha), \pi^\star\gamma > \mu_{g_T} = \int_M < \pi^\star\alpha, \pi^\star(d\gamma) > \mu_{g_T}$$

donc

$$\int_N < \beta, \gamma > \mu_h = \int_N < \alpha, d\gamma > \mu_h = \int_N < d^\star_h\alpha, \gamma > \mu_h.$$

La conclusion s'ensuit ■

Comme les formes ω et $\omega \wedge \omega$ de N sont parallèles, donc cofermées, on obtient par ce qui précède que $d^\star_H(\pi^\star\omega) = 0$ et $d^\star_H\Big[\pi^\star(\omega \wedge \omega)\Big] = 0$. En notant que $J^2 = (-1)^q \cdot id$ sur $\Lambda^q(H)$ la formule (2.1.16) nous donne

2.2.15 $$[d^\star_H, L] = (-1)^{q+1} J d_H J \quad sur\ \Lambda^q(H).$$

Par dualité il vient que

2.2.16 $$[d_H, L^\star] = (-1)^q J d^\star_H J\ sur\ \Lambda^q(H).$$

Donnons les versions itérées des deux formules précédentes sur $\Lambda^q(H)$, $s \geq 0$.

2.2.17 $$[d^\star_H, L^s] = (-1)^{q+1} s (J d_H J) L^{s-1}$$

Etablissons un autre fait utile :

2.2.18 $$[d_H, J d^\star_H J] = (-1)^q (r-q) \mathcal{L}_R\ sur\ \Lambda^q(H).$$

Démonstration :
Par (2.2.16) nous avons sur $\Lambda^q(H)$: $[d_H, J d^\star_H J] = (-1)^q \{d_H, [d_H, L^\star]\} = (-1)^q [d^2_H, L^\star]$. On conclut par (2.1.7) et (2.2.5) ■

Nous avons maintenant, à partir de (2.1.13), une expression simplifiée pour l'action de Δ_{g_T} sur la décomposition (2.1.2) :

2.2.19 $$\Delta_{g_T} = \begin{pmatrix} \Delta_H^T + T^2 LL^\star & -Jd_H J \\ T^2 Jd_H^\star J & \Delta_H^T + T^2 L^\star L \end{pmatrix} \textit{ sur } \Lambda^\star(M)$$

où $\Delta_H^T = \Delta_H - \frac{1}{T^2}\mathcal{L}_R^2$ (voir [43], page 2, pour une formule dans le cadre plus général des variétés de contact).

Remarque 2.2.4
Par les formules de (2.2.14) on obtient que

2.2.20 $$\Delta_H \pi^\star = \pi^\star \Delta_h \textit{ sur } \Lambda^\star(N)$$

Dans la suite, nous allons établir d'autres propriétés des opérateurs différentiels horizontaux qu'on a définis, propres à notre contexte actuel. Nous allons d'abord montrer un point technique crucial pour le reste de notre travail. Il s'agit de l'identité (2.2.24).

Faisons deux remarques concernant la connexion de Levi-Civita de g_T. Si $X \in \chi(N)$ soit $X^\star \in \chi(M)$ le relevé horizontal de X par rapport à la connexion θ. Notons que $X^\star$ est un champ invariant par l'action du cercle, donc $[X^\star, R] = 0$. Nous avons (cf. [6])

2.2.21 $$\nabla^T_{X^\star} Y^\star = (\nabla_X Y)^\star - \tfrac{T^2}{2}\omega(X,Y) \circ \pi \cdot R,\ X, Y \in \chi(N)$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita de h. Nous en déduisons

2.2.22 $$\nabla^T_R X^\star = -\tfrac{T^2}{2}(JX)^\star,\ X \in \chi(N).$$

Démonstration :
$\nabla^T_R X^\star$ est un champ horizontal car $< \nabla^T_R X^\star, R >= \frac{1}{2}R. < R, X^\star >= 0$. Comme il s'agit d'un champ invariant par S^1, il existe $Z \in \chi(N)$ tel que $\nabla^T_R X^\star = Z^\star$. Soit $Y \in \chi(N)$. Alors

$$< Y, Z > \circ\pi \ = < Y^\star, Z^\star > = < \nabla^T_R X^\star, Y^\star > = < \nabla^T_{X^\star} R, Y^\star > = \ - < R, \nabla^T_{X^\star} Y^\star > .$$

On conclut par (2.2.21) ■

Le fait dont nous aurons besoin est :

2.2.23 $$\begin{aligned} &\nabla^T_R \pi^\star \omega = 0 \\ &\nabla^T_X \pi^\star \omega = -\tfrac{T^2}{2}\alpha \wedge \theta,\ \alpha =< \cdot, X >,\ X \in \chi(M), horizontal. \end{aligned}$$

Démonstration :
Soient $Y, Z \in \chi(N)$. Nous avons

$$\begin{aligned} &\nabla^T_R \pi^\star \omega(Y^\star, Z^\star) = -\Big[\pi^\star\omega(\nabla^T_R Y^\star, Z^\star) + \pi^\star\omega(Y^\star, \nabla^T_R Z^\star)\Big] = \\ &= \tfrac{T^2}{2}\Big[\pi^\star\omega((JY)^\star, Z^\star) + \pi^\star\omega(Y^\star, (JZ)^\star)\Big] = 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\nabla^T_R \pi^\star \omega(R, Y^\star) = 0$ par (2.2.13) et le fait que $\pi^\star\omega$ est horizontale. Comme H est localement engendrée par des relevés de champs de N on a que $\nabla^T_R \pi^\star \omega = 0$. L'autre formule se démontre suivant le même principe ■

Nous pouvons maintenant démontrer l'identité :

2.2.24 $$(d_H J)^2 = (J d_H)^2 \ sur \ \Lambda^\star(H).$$

Démonstration :
Soit $D : \Lambda^\star(H) \to \Lambda^\star(H), D := (d_H J)^2 - (J d_H)^2$. Pour montrer que c'est un opérateur identiquement nul on procède en plusieurs étapes.
(i) $\{d_H, D\} = 0$.
Nous avons que $d_H D = d_H (d_H J)^2 - d_H (J d_H)^2 = d_H^2 (J d_H J) - (d_H J)^2 d_H$ et $D d_H = (d_H J)^2 d_H - (J d_H)^2 d_H = (d_H J)^2 d_H - (J d_H J) d_H^2$. Or les opérateurs $J d_H J, L, \mathcal{L}_R$ commutent deux à deux.
(ii) $D(\alpha \wedge \beta) = (-1)^q D\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge D\beta, (\alpha, \beta) \in \Lambda^p(H) \times \Lambda^q(H)$.
C'est une simple conséquence du fait que d_H est une antidérivation.
(iii) D est d'ordre 0 et $D \equiv 0$ sur $C^\infty(M)$.
Par (2.2.15) on a
$$[\Delta_H, L] = (-1)^{q+1} D$$
sur $\Lambda^q(H)$. Or, par (2.2.19) nous avons que
$$\Delta_{g_T}(\beta) = \Delta_H^T \beta + T^2 L L^\star \beta + T^2 (J d_H^\star J) \beta \wedge \theta$$
pour toute forme $\beta \in \Lambda^\star(H)$. Par conséquent, après calcul, on arrive à
$$[\Delta_{g_T}, L] = [\Delta_H^T, L] + T^2 L [L^\star, L] + T^2 J [d_H^\star, L] J \wedge \theta$$
Par (2.2.5) , (2.2.15) et le fait que L et $\mathcal{L}_R$ commutent, la formule précédente se met sous la forme plus simple

2.2.25 $$[\Delta_{g_T}, L]\beta = [\Delta_H, L]\beta + T^2 (r - q) L\beta + (-1)^q T^2 d_H \beta \wedge \theta, \beta \in \Lambda^q(H).$$

Soit $(f, \alpha) \in C^\infty(M) \times \Lambda^q(H)$. Nous allons calculer $[\Delta_H, L](f\alpha)$. Rappelons d'abord que, cf. [14],

2.2.26 $$\Delta_{g_T}(h \cdot \beta) = h \cdot \Delta_{g_T} \beta - 2\nabla^T_{grad\ h} \beta + \Delta_{g_T} f \cdot \beta, (h, \beta) \in C^\infty(M) \times \Lambda^\star(M).$$

Cette formule nous permet d'obtenir facilement
$$[\Delta_{g_T}, L](f \cdot \alpha) = f \cdot [\Delta_{g_T}, L]\alpha - 2\alpha \wedge \nabla^T_{grad\ f}(\pi^\star \omega).$$
Comme $\nabla^T_{grad\ f}(\pi^\star \omega) = -\frac{T^2}{2} d_H f \wedge \theta$ par (2.2.23), il s'ensuit, moyennant (2.2.25) que
$$[\Delta_H, L](f \cdot \alpha) = f \cdot [\Delta_H, L]\alpha.$$
Donc D est un opérateur d'ordre 0, nul sur $C^\infty(M)$, car $D(1) = 0$.
Nous allons maintenant réunir tous ces faits afin de pouvoir conclure. Par le fait que $\{D, d_H\} = 0$ on obtient que $D(d_H f) = 0, f \in C^\infty(M)$. Or D est d'ordre 0 et pour tout $\alpha \in \Lambda^1(H)_x, x \in M$ fixé, il existe $f \in C^\infty(M)$ avec $(d_H f)_x = \alpha$, donc D est nul sur $\Lambda^1(H)$. Comme $\Lambda^\star(H)$ est ponctuellement engendrée par les produits extérieurs des 1-formes horizontales nous pouvons conclure par (ii). ■

Au cours de la preuve de l'identité précédente on a également montré que

2.2.27 $$[\Delta_H, L] = 0 \ sur \ \Lambda^\star(H)$$

autrement dit le laplacien horizontal préserve la décomposition de Lefschetz. Nous déduisons de (2.2.24) un autre fait important :

2.2.28 $$[\Delta_H, J] = 0 \textit{ sur } \Lambda^\star(H).$$

Démonstration :
A l'aide de (2.2.16) on établit les égalités valables sur $\Lambda^q(H)$:

$$\begin{aligned}[(d_H J)^2, L^\star] &= (-1)^{q+1} d_H d_H^\star + J(d_H^\star d_H)J \\ [(J d_H)^2, L^\star] &= (-1)^q d_H^\star d_H - J(d_H d_H^\star)J\end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'en faire la différence pour conclure par (2.2.24) ■

Remarque 2.2.5
(i) La preuve de l'identité (2.2.24) repose sur les propriétés algébriques le L et J et l'identité fondamentale (2.2.15). Ce qui nous permet de conclure est le fait que ω est une forme parallèle de (N, h).
(ii) Une légère modification de la preuve de (2.2.24) nous permet de donner une formule pour la différence $(d_H J)^2 - (J d_H)^2$ lorsque ω n'est pas parallèle. Naturellement, il nous faut tenir compte du tenseur $\nabla\omega$ dans l'analogue de la formule (2.2.23).

2.2.1 Les opérateurs ∂_H et $\overline{\partial_H}$

On a vu (cf. (2.1.8)) que d_H n'est pas une différentielle exacte. La structure complexe J permet d'y remédier. L'intéret d'associer à d_H des différentielles exactes réside d'une part dans le fait que techniquement il est plus facile de travailler avec des opérateurs de carré nul et d'autre part dans le fait qu'à ces différentielles exactes on peut associer des théories de cohomologie.

Définition 2.2.1.1
Soient $\partial_H, \overline{\partial_H} : \Lambda^q(H) \to \Lambda^{q+1}(H)$ les opérateurs définis par

2.2.1.1 $$\begin{aligned}\partial_H &= \tfrac{1}{2}(d_H + (-1)^q i J d_H J) \\ \overline{\partial_H} &= \tfrac{1}{2}(d_H + (-1)^{q+1} i J d_H J).\end{aligned}$$

Notons qu'il s'agit de l'extension au cas d'une variété de contact de la définition des opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ qu'on utilise en géometrie kählerienne classique.

Ce sont des opérateurs différentiels de degré 1 et des antidérivations. Pour la clarté de l'exposé, nous allons donner l'expression des adjoints de ces opérateurs :

2.2.1.2 $$\begin{aligned}\partial_H^\star &= \tfrac{1}{2}(d_H^\star + (-1)^{q-1} i J d_H^\star J) \\ \overline{\partial_H}^\star &= \tfrac{1}{2}(d_H^\star + (-1)^q i J d_H^\star J)\end{aligned} \quad \textit{sur } \Lambda^q(H).$$

Ils sont reliés par les formules

2.2.1.3 $$\begin{aligned}&\partial_H^2 = (\overline{\partial_H})^2 = 0,\ \{\partial_H, \overline{\partial_H}\} = -L\mathcal{L}_R, \\ &\{\overline{\partial_H}^\star, \partial_H\} = \{\partial_H^\star,\ \overline{\partial_H}\} = 0.\end{aligned}$$

Les trois premières découlent de (2.1.8) et de $(d_H J)^2 = (J d_H)^2$ (cf.(2.2.24)) Pour les deux dernières, on se sert de (2.2.18) et (2.2.28). En particulier, comme $\overline{\partial_H}$ est une différentielle exacte nous avons la

Définition 2.2.1.2
L'algèbre de cohomologie de Dolbeault, $\overline{H}^\star(M)$, est définie comme la cohomologie du complexe $(\Lambda^\star(H), \overline{\partial_H})$. L'algèbre de cohomologie k-équivariante, $k \in \mathbb{Z}$ sera notée $\overline{H}^\star_k(M)$.

Nous verrons plus tard qu'il n'y a pas lieu de considérer le complexe $(\Lambda^\star(H), \partial_H)$.

Remarque 2.2.1.1
Lorsque J n'est plus intégrable $\overline{\partial_H}$ n'est plus une différentielle exacte. Cependant, il a été montré dans [11] qu'il existe un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0, noté $\overline{\partial_H}^\#$, tel que $\overline{\partial_H} + \overline{\partial_H}^\#$ soit une différentielle exacte.

Notons que les identités (2.2.15-16) se traduisent dans le langage des opérateurs $\partial_H, \overline{\partial_H}$ par

2.2.1.4
$$[\partial_H, L^\star] = -i\overline{\partial_H}^\star \ , \ [\overline{\partial_H}, L^\star] = i\partial_H^\star$$
$$[\partial_H^\star, L] = -i\overline{\partial_H}, \ [\overline{\partial_H}^\star, L] = i\partial_H.$$

Nous allons maintenant examiner l'action de $\partial_H, \overline{\partial_H}$ sur la bigraduation de $\Lambda^\star(H)$. Faisons quelques préparatifs qui nous seront également utiles par la suite.

Définition 2.2.1.3
Si X est un champ horizontal sur M soit

$$\nabla^H_X : \Lambda^\star(H) \to \Lambda^\star(H)$$

l'opérateur qui à une forme horizontale α associe la partie horizontale de $\nabla^T_X \alpha$ où $T > 0$.

Remarque 2.2.1.2
(i) Il est facile de s'assurer que la définition précédente ne dépend pas du choix de T.
(ii) On a obtenu une connexion partielle

$$\nabla^H : \Lambda^\star(H) \to \Gamma(H \otimes \Omega(H)).$$

Notons également que nous avons par (2.2.21) :

2.2.1.5
$$\nabla^H_{X^\star} \pi^\star = \pi^\star \nabla_X, X \in \chi(N).$$

(iii) L'endomorphisme J préserve $\nabla^H_X, X \in \chi(M)$ horizontal. Il en est de même pour $\mathcal{J}$.

Nous pouvons maintenant démontrer l'identité

2.2.1.6
$$[d_H, \mathcal{J}] = (-1)^{q+1} J d_H J \text{ sur } \Lambda^q(H).$$

Démonstration :
Soit $x \in M$ et $\{e_j\}_{j=\overline{1,2r}}$ un repère orthonormé horizontal tel que $(\nabla^H_{e_i} e_j)_x = 0, i, j = \overline{2r}$. Nous déduisons de (2.1.15) et de la définition de la différentielle horizontale qu'au point x nous avons

$$d_H = -\sum_{i=1}^{2r} e^i \wedge \nabla^H_{e_i}.$$

Nous allons maintenant utiliser cette formule. Tous nos calculs seront faits au point x. Soit $\alpha \in \Lambda^q(H)$; alors :

$$-\mathcal{J} d_H \alpha = \sum_{i=1}^{2r} \mathcal{J}(e^i \wedge \nabla^H_{e_i}\alpha) = \sum_{i=1}^{2r} Je^i \wedge \nabla^H_{e_i}\alpha + e^i \wedge \mathcal{J}\nabla^H_{e_i}\alpha$$

par (2.2.10). Or $\nabla^H_{e_i}$ et $\mathcal{J}$ commutent et nous pouvons écrire $\nabla^H_{e_i} = (-1)^q J \nabla^T_{e_i} J$ ■

Comme $[\mathcal{J}, J] = 0$ et $\mathcal{J}$ est antisymmétrique nous en déduisons

2.2.1.7
$$\begin{array}{l} [\partial_H, \mathcal{J}] = i\partial_H,\ [\overline{\partial_H}, \mathcal{J}] = -i\overline{\partial_H} \\ [\partial_H^\star, \mathcal{J}] = -i\partial_H^\star,\ [\overline{\partial_H}^\star, \mathcal{J}] = i\overline{\partial_H}^\star \end{array} \quad \textit{sur } \Lambda^\star(H).$$

Donc l'action de $\partial_H, \overline{\partial_H}$ et de leurs adjoints sur la bigraduation de $\Lambda^\star(H)$ est décrite par le diagramme

2.2.1.8
$$\begin{array}{ccccc} & & \Lambda^{t-1,s}(H) & & \\ & & \uparrow \overline{\partial_H}^\star & & \\ \Lambda^{t,s-1}(H) & \xleftarrow{\partial_H^\star} & \Lambda^{t,s}(H) & \xrightarrow{\partial_H} & \Lambda^{t,s+1}(H) \\ & & \downarrow \overline{\partial_H} & & \\ & & \Lambda^{t+1,s}(H) & & \end{array} .$$

Associons à $\partial_H, \overline{\partial_H}$ les laplaciens $\Delta_{\partial_H}, \Delta_{\overline{\partial_H}} : \Lambda^q(H) \to \Lambda^q(H)$ définis par

2.2.1.9
$$\Delta_{\partial_H} = \partial_H\partial_H^\star + \partial_H^\star\partial_H, \Delta_{\overline{\partial_H}} = \overline{\partial_H}\overline{\partial_H}^\star + \overline{\partial_H}^\star\overline{\partial_H}.$$

En utilisant (2.2.18) un calcul algébrique montre que

2.2.1.10
$$\begin{array}{l} \Delta_{\partial_H} = \frac{1}{2}(\Delta_H - i(r-q)\mathcal{L}_R) \\ \Delta_{\overline{\partial_H}} = \frac{1}{2}(\Delta_H + i(r-q)\mathcal{L}_R) \end{array} \quad \textit{sur } \Lambda^q(H).$$

Le noyau de ces opérateurs sera relié aux groupes de cohomologie de Dolbeault et étudié dans la section suivante. Par ces formules et (2.2.1.8) nous obtenons que Δ_H préserve la bigraduation de $\Lambda^\star(H)$. Nous finissons cette section par

Remarque 2.2.1.3
Toutes les identités présentées dans cette section ont été démontrées par d'autres moyens dans [45]. Notre présentation a l'avantage d'être ouverte à la généralisation (voir aussi la remarque (2.2.5),(ii)).

2.2.2 Formules de commutation polynômiales

Nous allons présenter ici quelques généralités sur les commutateurs du type $[P(\Delta_H), d_H]$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ qui nous serviront constamment par la suite. En utilisant (2.2.1.10) et le fait que

$$[\Delta_{\partial_H}, \partial_H] = [\Delta_{\overline{\partial_H}}, \overline{\partial_H}] = 0$$

on obtient par récurrence sur le degré de P :

2.2.2.1
$$\begin{aligned} &\partial_H P(\Delta_H) = P(\Delta_H + i\mathcal{L}_R)\partial_H \quad \partial_H^\star P(\Delta_H) = P(\Delta_H - i\mathcal{L}_R)\partial_H^\star \\ &\overline{\partial_H} P(\Delta_H) = P(\Delta_H - i\mathcal{L}_R)\overline{\partial_H} \quad \overline{\partial_H}^\star P(\Delta_H) = P(\Delta_H + i\mathcal{L}_R)\overline{\partial_H}^\star \quad . \end{aligned}$$

A cause du fait que la dérivée de Lie $\mathcal{L}_R$ commute avec les opérateurs utilisés dans cette section, toutes les formules que nous avons établies sont valables pour des opérateurs du type $P(\Delta_H^T)$.

Les identités précédentes nous permettent de donner l'action de $\partial_H, \partial_H^\star$ sur la décomposition de Hodge d'un opérateur (elliptique) du type $P(\Delta_H^T), P \in \mathbb{C}[X]$:

2.2.2.2
$$\begin{aligned} &\overline{\partial_H}^\star\Big[KerP(\Delta_H^T)\Big] \subseteq KerP(\Delta_H^T + i\mathcal{L}_R), \partial_H^\star\Big[KerP(\Delta_H^T)\Big] \subseteq KerP(\Delta_H^T - i\mathcal{L}_R) \\ &\overline{\partial_H}^\star\Big[ImP(\Delta_H^T)\Big] \subseteq ImP(\Delta_H^T + i\mathcal{L}_R),\ \partial_H^\star\Big[ImP(\Delta_H^T)\Big] \subseteq ImP(\Delta_H^T - i\mathcal{L}_R). \end{aligned}$$

Les formules (2.2.2.1) nous conduisent par addition aux identités valables sur $\Lambda^q(H)$:

2.2.2.3
$$\begin{aligned} &[P(\Delta_H), d_H] = \Big[P(\Delta_H) - \tfrac{1}{2}(P(\Delta_H + i\mathcal{L}_R) + P(\Delta_H - i\mathcal{L}_R))\Big]d_H + \\ &+\tfrac{(-1)^q i}{2}\Big[P(\Delta_H - i\mathcal{L}_R) - P(\Delta_H + i\mathcal{L}_R)\Big]Jd_HJ \end{aligned}$$

et

2.2.2.4
$$\begin{aligned} &[P(\Delta_H), d_H^\star] = \Big[P(\Delta_H) - \tfrac{1}{2}(P(\Delta_H + i\mathcal{L}_R) + P(\Delta_H - i\mathcal{L}_R))\Big]d_H^\star + \\ &+\tfrac{(-1)^q i}{2}\Big[P(\Delta_H - i\mathcal{L}_R) - P(\Delta_H + i\mathcal{L}_R)\Big]Jd_H^\star J. \end{aligned}$$

2.3 Les espaces $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$

Dans cette section, on étudie les noyaux des opérateurs $\Delta_H, \Delta_{\overline{\partial_H}}, \Delta_{\overline{\partial_H}}$ et les théories de cohomologie qui leurs sont associées. Notre motivation pour étudier ces espaces est multiple :
- ces espaces vont intervenir naturellement dans l'étude des espaces propres du laplacien Δ_{g_T} que nous allons faire au chapitre 4. Les résultats de cette section seront utilisés dés la section suivante.
-l'espace $\mathcal{H}$ permet d'exprimer les formes harmoniques de (M, g_T) à l'aide d'objets horizontaux (voir le corollaire 4.2.3) .
-ces espaces produiront, comme on va le voir au théorème 4.1.2, des valeurs propres privilégiées pour le laplacien Δ_{g_T}. Lorsque $T \to 0$ nous obtenons ainsi les petites valeurs propres du laplacien Δ_{g_T} (voir le paragraphe 5.2).

Nous faisons quelques remarques sur ces espaces et nous démontrons le résultat de structure contenu dans la proposition 2.3.2. Nous rappelons quelques faits sur la régularité de nos opérateurs, ce qui permettra de faire le lien avec les groupes de cohomologie de Dolbeault introduits par la définition 2.2.1.2. Ces groupes de cohomologie sont sensiblement différents des groupes de de Rham ; ils sont propres à la structure géométrique (CR-transverse) que porte M.

Les résultats qui seront mentionnés ici ont été obtenus pour la plupart par N.Tanaka dans [45]. Nous commençons par introduire quelques définitions.

Définition 2.3.1
Pour $q \geq 0$ nous définissons

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1^q &= Ker\Delta_{\overline{\partial_H}} \cap \mathcal{S}^q \\ \mathcal{H}_2^q &= Ker\Delta_{\partial_H} \cap \mathcal{S}^q \\ \mathcal{H}^q &= Ker\Delta_H \cap \mathcal{S}^q\end{aligned}$$

On définit également

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{H}^q$$

et, par analogie, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$.

Nous pouvons définir de manière évidente des espaces $\mathcal{H}_k^q, \mathcal{H}_{1,k}^q, \mathcal{H}_{2,k}^q, k \in \mathbb{Z}$. La conjugaison complexe réalise un isomorphisme :

$$\mathcal{H}_{1,k}^q \to \mathcal{H}_{2,-k}^q.$$

Pour cette raison il n'y a pas lieu d'étudier l'espace $\mathcal{H}_2^q$.

Par un argument de positivité et (2.2.1.10) il vient que

$$\mathcal{H}_{1,k}^q = 0 \text{ si } k(r-q) < 0.$$

Notre point de vue concernant les espaces qu'introduit la définition 2.3.1 est illustré par le résultat suivant.

Proposition 2.3.1
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq q \leq r$. Alors la première valeur propre de Δ_H agissant sur $\Lambda_k^q(H)$ est $k(r-q)$. Si $k > 0$, l'espace propre associé est $\mathcal{H}_{1,k}^q$.

Démonstration :
Le fait que $k(r-q)$ est la première valeur propre de Δ_H sur $\Lambda_k^q(H)$ découle de la formule (2.2.1.10) et de la positivité de $\Delta_{\overline{\partial_H}}$. Ensuite, soit $\alpha \in \Lambda_k^q(H)$ telle que $\Delta_H \alpha = k(r-q)\alpha$. Par application de $L^\star$ et (2.2.1.10) on arrive à $\Delta_{\overline{\partial_H}} L^\star \alpha = -kL^\star \alpha$. La positivité de $\Delta_{\overline{\partial_H}}$ entraîne, lorsque $k > 0$, la primitivité de α ■

Ensuite nous avons que :

2.3.1 $$\mathcal{H}^q \subseteq Ker\mathcal{L}_R \text{ si } q < r$$

Démonstration :
Soit $\alpha \in \mathcal{H}^q$. Il vient alors que $d_H \alpha = 0$ ou encore $d_H^2 \alpha = 0$. Ceci entraine que $L(\mathcal{L}_R \alpha) = 0$, d'où $\mathcal{L}_R \alpha = 0$ car c'est une forme primitive de degré $q < r$ ■

On en déduit que

2.3.2 $$\mathcal{H}_k^q = 0 \text{ si } k(r-q) \neq 0,$$

autrement dit le noyau de Δ_H est constitué de formes invariantes par le cercle en degré plus petit que r.

Par (2.3.1) il vient que

2.3.3 $$\mathcal{H}^q \subseteq \mathcal{H}_1^q \text{ et } \mathcal{H}^q \subseteq \mathcal{H}_2^q$$

avec égalité si $q = r$.

D' autres propriétés des espaces qu'on a considérés sont :

2.3.4 $$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^q &\subseteq Ker(d_H^\star) \cap Ker(d_H^\star J) \\ \mathcal{H}_2^q &\subseteq Ker(d_H^\star) \cap Ker(d_H^\star J) \end{aligned}$$

Démonstration :
Soit $\alpha \in \mathcal{H}_1^q$. Nous avons donc $\overline{\partial_H}^\star \alpha = 0$. Il suffit de montrer que $\partial_H^\star \alpha = 0$. Or $\overline{\partial_H} \alpha = 0$, α est primitive, ce qui nous permet de conclure par (2.2.1.4). La deuxième inclusion est analogue ■

On a aussi

2.3.5 $$\mathcal{H}^q \subseteq Ker(d_H^\star) \cap Ker(d_H^\star J).$$

Démonstration :
Soit $\alpha \in \mathcal{H}^q$. Alors $d_H^\star \alpha = 0$ car $\Delta_H = d_H d_H^\star + d_H^\star d_H$. Pour avoir $d_H^\star J(\alpha) = 0$ il suffit de remarquer que J préserve $\mathcal{H}^q$ par (2.2.28) ■

En degré r nous avons :

2.3.6 $$\mathcal{H}^r = Ker(d_H^\star) \cap Ker(d_H^\star J) \cap \mathcal{S}^r.$$

Démonstration :
L'inclusion " $\subseteq$ " vient par (2.3.5). Soit maintenant $\alpha \in Ker(d_H^\star) \cap Ker(d_H^\star J) \cap \mathcal{S}^r$. On s'assure que la forme $L(J\alpha)$ est primitive, donc nulle car il n'y a pas de formes primitives en degré plus grand que r. Il vient que $[d_H^\star, L](J\alpha) = 0$. Par la formule (2.2.15) ceci entraine que $d_H \alpha = 0$ d'où $\Delta_H \alpha = 0$ ■

Remarquons que les espaces introduits par la définition (2.3.1) consistent en des formes primitives. Ils déterminent complétement les noyaux des opérateurs $\Delta_H, \Delta_{\overline{\partial_H}}, \Delta_{\partial_H}$ par le résultat suivant.

Proposition 2.3.2
(i)

$$Ker\Delta_H = \bigoplus_{q=0}^{r} L^q \mathcal{H}^\star.$$

(ii) Sur les q-formes horizontales de M nous avons :

$$Ker\Delta_{\overline{\partial_H}} = \mathcal{H}_1^q \oplus L\Big[Ker\Delta_H\Big] \text{ si } q \leq r$$

(iii) Soit $Harm^q(M, g_T)$ l'espace des q-formes harmoniques de (M, g_T). Nous avons une inclusion

$$\mathcal{H}^q \subseteq Harm^q(M, g_T),\ q < r.$$

Par conséquent $\mathcal{H}^q, q < r$ sont de dimension finie.

Démonstration :
(i) C'est une conséquence directe du fait que Δ_H préserve la décomposition de Lefschetz.
(ii) Lorsque $q = r$ notre assertion découle de (i), car $\mathcal{H}_1^r = \mathcal{H}^r$ et $\Delta_{\overline{\partial_H}} = \frac{1}{2}\Delta_H$.
Supposons $q < r$ et considérons $\alpha \in Ker\Delta_{\overline{\partial_H}}$. Donc

$$(\Delta_H + i(r-q)\mathcal{L}_R)\alpha = 0$$

ce qui entraine

2.3.7 $$(\Delta_H + i(r-q)\mathcal{L}_R)L^\star\alpha = 0.$$

A cause de la positivité de Δ_H il vient que

$$\int_M < i\mathcal{L}_R)L^\star\alpha, L^\star\alpha > \leq 0.$$

Mais (2.3.7) s'écrit de manière équivalente

$$\Delta_{\overline{\partial_H}}(L^\star\alpha) = i\mathcal{L}_R(L^\star\alpha).$$

La positivité du laplacien $\Delta_{\overline{\partial_H}}$ nous donne

$$\int_M < i\mathcal{L}_R(L^\star\alpha), L^\star\alpha > \geq 0$$

donc $\int_M < i\mathcal{L}_R(L^\star\alpha), L^\star\alpha >= 0$. Il vient que $L^\star\alpha \in Ker\Delta_H$ par (2.3.7). On conclut par un raisonnement standard impliquant la décomposition de Lefschetz.
(iii) Soit $\alpha \in \mathcal{H}^q, q < r$. Nous avons que $\mathcal{L}_R\alpha = 0, \Delta_H\alpha = 0$ donc par (2.2.19) il vient que $\Delta_{g_T}\alpha = T^2LL^\star\alpha + T^2Jd_H^\star J\alpha \wedge \theta$. Or α est primitive et $\mathcal{H}^q$ est stable par J, d'où $\Delta_{g_T}\alpha = 0$ ■

Remarque 2.3.1
(i) On donnera plus tard une caractérisation complète de $Harm^q(M, g_T)$ à partir de $\mathcal{H}^q$ (voir le corollaire 3.1.1).
(ii) Par la proposition 2.3.2, (iii) et (2.3.1) il vient que les formes harmoniques de (M, g_T) sont invariantes par le cercle. Ce fait est également la conséquence d'un théorème général sur les formes harmoniques d'une variété qui possède une action isométrique d'un groupe de Lie compact et connexe.

Le fait que la structure complexe J et par conséquent le morphisme $\mathcal{J}$ préservent les espaces $\mathcal{H}^q, \mathcal{H}_1^q, \mathcal{H}_2^q, 0 \leq q \leq r$ nous permet de définir des espaces de formes harmoniques (pour les différents opérateurs qu'on considère) de type (p, q). Ces espaces seront notés $\mathcal{H}^{p,q}, \mathcal{H}_1^{p,q}, \mathcal{H}_2^{p,q}$.

Pour relier les espaces définis ci-dessus aux groupes de cohomologie nous avons besoin de rappeler quelques résultats analytiques concernant les trois opérateurs qui nous intéressent.

Faits : (cf. [42] et [45])
1. Le laplacien $\Delta_{\overline{\partial_H}}$ est hypoelliptique sur $\Lambda^{p,q}(H), p \neq 0, r$.
2. Le laplacien Δ_{∂_H} est hypoelliptique sur $\Lambda^{p,q}(H), q \neq 0, r$.
3. Le laplacien horizontal Δ_H est hypoelliptique sur $\Lambda^{p,q}(H), |p-q| < r$.

Comme les opérateurs hypoelliptiques possèdent une décomposition de Hodge, par une remarque de N.Tanaka (cf. [45]) nous obtenons l'existence des projections harmoniques et des fonctions de Green pour ces opérateurs qui seront notées H^{Δ_H}, $H^{\Delta_{\partial_H}}$, $H^{\Delta_{\overline{\partial_H}}}$ et G^{Δ_H}, $G^{\Delta_{\partial_H}}$, $G^{\Delta_{\overline{\partial_H}}}$.

Des raisonnements standards de la théorie de Hodge entrainent maintenant l'isomorphisme entre l'espace de cohomologie de Dolbeault et le noyau de $\Delta_{\overline{\partial_H}}$:

2.3.8 $$\overline{H}^\star(M) \equiv Ker\Delta_{\overline{\partial_H}}.$$

Une autre conséquence de l'hypoellipticité de $\Delta_{\overline{\partial_H}}$ est que

2.3.9 *Les espaces* $\mathcal{H}_1^{p,q}, p \neq 0, r$ *sont de dimension finie.*

Remarque 2.3.2 *Le fait que les espaces $\mathcal{H}_{1k}^q, k \in \mathbb{Z}$ sont de dimension finie peut être déduit sans utiliser les résultats de régularité sus-cités. C'est une conséquence du fait que ces espaces sont intreprétables comme des espaces propres du laplacien Δ_{g_T} (voir le théoréme 4.2.2).*

Pour d'autres résultats voir [45].

2.4 La décomposition de Hodge des espaces propres de Δ_H^T

Faisons d'abord une analogie avec la décomposition de Hodge standard. Nous avons

$$\Lambda^\star(M) = Ker(d^\star) \oplus Im(d).$$

Ceci entraine que les espaces propres de Δ_{g_T} se décomposent en deux parties, contenues dans $Ker(d^\star), Im(d)$ respectivement.

Nous nous proposons maintenant d'obtenir un résultat analogue pour les formes horizontales de M (ou pour les espaces propres de Δ_H^T)en utilisant les opérateurs $d_H, d_H^\star$.

Nous avons tout d'abord besoin d'un espace qui soit préservé par le laplacien Δ_H^T. Comme les espaces $Ker(d_H^\star)$ et $Im(d_H)$ ne le sont pas (voir les formules du paragraphe 2.2) l'analogie n'est pas immédiate. L'espace que nous allons utiliser est introduit par la définition suivante.

Définition 2.4.1
Pour $0 \leq q \leq r$ soit

$$\mathcal{P}^q := \mathcal{S}^q \cap Ker(d_H^\star) \cap Ker(d_H^\star J).$$

Nous pouvons définir également des espaces de formes équivariantes en posant :

$$\mathcal{P}^q_k := \mathcal{P}^q \cap \Lambda^q_k(H),\ k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq q \leq r.$$

Introduisons aussi

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{P}^q.$$

Remarque 2.4.1
La définition que nous venons de poser est motiver par l'exemple simple suivant. Soit $\alpha \in \Lambda^1(N)$. Par décomposition de Hodge nous avons

$$\alpha = df + \beta$$

où $f \in C^\infty(N)$ et $d^\star\beta = 0$. La structure complexe J nous permet de décomposer β comme suit :

$$\beta = Jdf_1 + \beta_1$$

avec $f_1 \in C^\infty(N)$ et $d^\star J(\beta_1) = 0$. Ceci provient de la décomposition de Hodge de $J\beta$. Comme $d^\star Jd = 0$ sur $C^\infty(N)$ (cf. 2.2.18), il vient que $d^\star\beta_1 = d^\star J(\beta_1) = 0$. Nous avons montré que

$$\Lambda^1(N) = dC^\infty(N) \oplus JdC^\infty(N) \oplus \Big[Ker(d^\star) \cap Ker(d^\star J)\Big].$$

On voit apparaitre un espace du type défini précédement. Nous allons étendre ce cas particulier à $\Lambda^\star(H)$ dans ce qui suit.

L'espace $\mathcal{P}^q$ que venons de définir est présérvé par le laplacien Δ_H, par (2.2.28) et (2.2.2.4). Il est également préservé par la dérivée de Lie $\mathcal{L}_R$, donc par le laplacien Δ^T_H. C'est un espace fondamental pour les problèmes qui nous interesseront ultérieurement. Il inteviendra de façon naturelle dans l'étude de l'espace E que nous allons faire au chapitre suivant ainsi que dans l'expression des espaces propres du laplacien Δ_{g_T} que nous allons présenter en (4.1) .

L'utilité pratique de ce que nous allons faire par la suite apparaitra au chapitre 5, où nous seront confrontés au problème suivant :

-supposons connu le spectre de Δ^T_H en restriction à $\mathcal{S}^q$. Il nous faut déterminer le spectre de la restriction de Δ^T_H à $\mathcal{P}^q$.

La réponse à ce problème est donnée, de manière générale, par la proposition 2.4.1. Un exemple concret sera traité au chapitre 5.

Posons maintenant quelques notations concernant les espaces propres du laplacien Δ^T_H. Nous rappelons que cet opérateur possède un spectre discret car il s'agit d'un opérateur elliptique, cf. le corollaire 2.1.1.

Définition 2.4.2
Pour $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq q \leq r$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ fixé définissons les espaces propres suivants :

2.4.1

$$\begin{aligned}
&E^q_k(\lambda) := Ker(\Delta^T_H - \lambda) \cap \mathcal{S}^q_k\\
&F^q_k(\lambda) := Ker(\Delta^T_H - \lambda) \cap \mathcal{P}^q_k\\
&F^{q,k}_R(\lambda) := E^q_k(\lambda) \cap \mathcal{H}^\perp_1 \cap \mathcal{H}^\perp_2\\
&F^{q,k}_r(\lambda) := F^q_k(\lambda) \cap \mathcal{H}^\perp.
\end{aligned}$$

On a une inclusion évidente

$$F_k^q(\lambda) \subseteq E_k^q(\lambda).$$

Par (2.3.6) nous obtenons que

2.4.2
$$F_k^r(\lambda) = \begin{cases} 0 & si \quad \lambda \neq \frac{k^2}{T^2} \\ \mathcal{H}_k^r & si \quad \lambda = \frac{k^2}{T^2}. \end{cases}$$

Nous en déduisons que

2.4.3
$$F_r^{r,k}(\lambda) = 0,\ k \in \mathbb{Z},\ \lambda \geq 0.$$

Lorsque $q < r$ nous avons

2.4.4
$$F_R^{q,k}(\lambda) = \begin{cases} F_k^q(\lambda) & si \quad \lambda \neq k(r-q) + \frac{k^2}{T^2} \\ 0 & si \quad \lambda = k(r-q) + \frac{k^2}{T^2}. \end{cases}$$

Nous allons maintenant énnoncer et démontrer le résultat concernant la décomposition de Hodge des espaces propres du laplacien Δ_H^T. On va en déduire que le spectre de la restriction de Δ_H^T à $\mathcal{P}^q$ détermine le spectre de Δ_H^T.

Proposition 2.4.1
Pour tout $0 \leq q \leq r$ *et* $k \in \mathbb{Z}$ *il existe un isomophisme*

2.4.5
$$E_k^q(\lambda) \cong F_R^{q-2,k}(\lambda) \times F_r^{q-1,k}(\lambda - k) \times F_R^{q-1,k}(\lambda + k) \times F_k^q(\lambda).$$

Démonstration :
On considère l'application

$$\partial_H^\star \overline{\partial_H}^\star : E_k^q(\lambda) \to F_R^{q-2,k}(\lambda).$$

Une vérification de routine nous assure que c'est bien définie. Montrons qu'elle est surjective. Si $\lambda \neq k(r-q+2)$, un inverse à droite est donné par

$$\frac{4(r-q+2)}{(r-q+1)(k^2(r-q+2)^2 - \lambda^2))}(\partial_H \overline{\partial_H} - \frac{i}{r-q+2} L\Delta_{\overline{\partial_H}}).$$

Si $\lambda = k(r-q+2)$, notre application est identiquement nulle car $F_R^{q-2,k}(k(r-q+2)) = 0$, donc surjective. En résumé, on a suite exacte

$$0 \to K_k^q(\lambda) \hookrightarrow E_k^q(\lambda) \overset{\partial_H^\star \overline{\partial_H}^\star}{\to} F_R^{q-2,k}(\lambda) \to 0$$

où l'on a posé $K_k^q(\lambda) := Ker\ \partial_H^\star \overline{\partial_H}^\star \cap E_k^q(\lambda)$. Etudions maintenant l'application

$$\partial_H^\star \oplus (\overline{\partial_H})^\star : K_k^q(\lambda) \to F_r^{q-1,k}(\lambda - k) \times F_R^{q-1,k}(\lambda + k).$$

Si $\lambda \neq k(r-q)$, on a un inverse à droite donné par

$$(\alpha_1, \alpha_2) \to \frac{2}{\lambda + k(r-q)} \partial_H \alpha_1 + \frac{2}{\lambda - k(r-q)} \overline{\partial_H} \alpha_2$$

sinon notre application est identiquement nulle. On conclut que l'application est surjective, donc on obtient une suite exacte

$$0 \to F_k^q(\lambda) \hookrightarrow K_k^q(\lambda) \overset{\partial_H^\star \times (\overline{\partial_H})^\star}{\to} F_r^{q-1,k}(\lambda - k) \times F_R^{q-1,k}(\lambda + k) \to 0.$$

L'isomorphisme désiré s'obtient en combinant les deux suites exactes ci-dessus ■

Remarque 2.4.2 *(i) Si $k = 0$ la décomposition (2.4.5) peut s'obtenir à partir de la décomposition de Hodge de $\Lambda^\star(N)$ (voir aussi la remarque 2.4.1). Lorsque $k \neq 0$ la différence provient du fait que Δ_H ne commute plus avec $d_H, d_H^\star$.*
(ii) En utilisant la décomposition de Lefschetz et la proposition 2.4.1 on conclut que le spectre du laplacien horizontal est déteminé par le spectre de sa restriction aux espaces $\mathcal{P}_k^q$ et reciproquement.

Par le fait que toutes les applications utilisées dans la preuve de notre proposition commutent avec $\mathcal{J}$, on a un résultat similaire pour les formes de type (s,t) comme suit. Introduisons les espaces $E_k^{s,t}(\lambda), F_k^{s,t}(\lambda), F_R^{s,t,k}(\lambda), F_r^{s,t,k}(\lambda)$ par analogie avec la définition 2.4.2 en utilisant des formes du type (s,t). On a alors un isomorphisme linéaire

2.4.6 $$E_k^{s,t}(\lambda) = F_R^{s-1,t-1,k}(\lambda) \times F_r^{s,t-1,k}(\lambda - k) \times F_R^{s-1,t,k}(\lambda + k) \times F_k^{s,t}(\lambda).$$

En utilisant la même technique que nous avons utilisée pour la démonstration de la proposition 2.4.1 nous pouvons obtenir une décomposition de Hodge pour l'espace des formes horizontales primitives comme l'indique le diagramme suivante.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & \mathcal{P}^q & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
0 & \to & Ker(d_H^\star J)^2 \cap \mathcal{S}^q & \hookrightarrow & \mathcal{S}^q & \xrightarrow{(d_H^\star J)^2} & \mathcal{P}^{q-2} \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp & \to & 0 \\
 & & \downarrow \partial_H^\star \oplus \overline{\partial_H}^\star & & & & & & \\
 & & (\mathcal{P}^{q-1} \cap \mathcal{H}_2^\perp) \oplus (\mathcal{P}^{q-1} \cap \mathcal{H}_1^\perp) & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Chapitre 3

Quelques lemmes techniques

Sommaire

3.1 Introduction **35**
3.2 La décomposition de l'espace E **36**
3.2.1 Définitions et motivation 36
3.2.2 Une première décomposition de E 38
3.2.3 L'espace I_1 43
3.2.4 Résumé des résultats obtenus 45
3.3 La réalisation de l'espace E **46**
3.3.1 Quelques définitions 46
3.3.2 Réalisation de l'espace I_1 48
3.3.3 Réalisation de l'espace E_1 51
3.3.4 Réalisation de l'espace E_2 54

3.1 Introduction

Ce chapitre se propose de développer une partie de la technique qui nous sera nécessaire pour démontrer nos résultats. Le contexte géométrique est celui de la section 2.2. Nous avons choisi de travailler de manière relativement abstraite, en étudiant un espace de formes sujettes à certaines conditions et qui sera noté E. Ceci car nous voulons construire un outil qui sera utilisé à plusieurs reprises et pour mieux éclaircir les mécanismes qui permettront d' établir le principe de séparation des variables. Notre motivation deviendra plus claire au chapitre 4 où cet espace apparaîtra naturellement lors de l'étude des formes propres du laplacien Δ_{g_T} (voir la section 4.3). Dans un premier temps le lecteur peut passer directement au chapitre 4 et revenir au chapitre 3 au moment de la preuve du théorème 4.2.1.

Le chapitre 3 comporte deux parties. Dans la première nous nous intéressons à la structure de l'espace E que l'on définit en 3.2.1. Nous montrons en 3.2.2 et 3.2.3 que l'espace E se décompose en somme directe d'espaces propres du laplacien horizontal (propositions 3.2.2.1 et 3.2.3.1). La deuxième partie de cette section consiste à montrer que les différentes parties de l'espace E produisent des formes propres de Δ_{g_T} qui satisfont certaines conditions relatives à la décomposition de Lefschetz. Ce programme est accompli aux paragraphes 3.3.1-3.3.4. Ce

type de résultats constituera notre deuxième argument essentiel pour la preuve des résultats du chapitre 4 (théorème 4.2.1).

Bien que dans cette section on ait à faire à des objets assez compliqués, la technique utilisée pour la preuve de nos résultats est élémentaire et très calculatoire ; nous nous servons essentiellement de la décomposition de Hodge pour des opérateurs elliptique autoadjoints bien choisis, des arguments de positivité pour les opérateurs qui nous intéressent, ainsi que d'une bonne utilisation des formules de commutation obtenues en 2.2.

3.2 La décomposition de l'espace E

3.2.1 Définitions et motivation

Le but de ce paragraphe est de présenter quelques propriétés de l'espace qu'introduit la définition suivante.

Définition 3.2.1.1
Soit E l'espace des formes $\alpha \in \mathcal{S}^q, 0 \leq q \leq r$ qui vérifient les conditions :

$$\begin{aligned}
&(j_1)\ d_H^\star(J\alpha) = 0\\
&(j_2)\ P(\Delta_H^T)d_H^\star\alpha = 0\\
&(j_3)\ (QR)(\Delta_H^T)\alpha = -T^2Q(\Delta_H^T)(d_Hd_H^\star\alpha)\\
&(j_4)\ P(\Delta_H^T)\alpha \in \mathcal{H}^\perp\\
&(j_5)\ Q(P - i\mathcal{L}_R)(\Delta_H^T)\alpha \in \mathcal{H}_1^\perp\\
&(j_6)\ Q(P + i\mathcal{L}_R)(\Delta_H^T)\alpha \in \mathcal{H}_2^\perp
\end{aligned}$$

où $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$, $P = X + a, Q = P - b, R = P(P - T^2(r-q)) - T^2X$ avec $a \in \mathbb{R}, T > 0$ et $0 \leq b \leq T^2(r-q)$.

Remarque 3.2.1.1
(i) Dans le reste de ce chapitre $0 \leq q \leq r$ sera fixé.
(ii) Les conditions $(j_1) - (j_6)$ sont satisfaites par le bas de la décomposition de Lefschetz d'une formes propre pour le laplacien Δ_{g_T} (voir la section 4.3). Les résultats de ce chapitre montreront que l'appartenance à l'espace E caractérise complètement une telle forme propre.

Nous allons maintenant démontrer que E est un espace de dimension finie. Ceci sera fait en montrant que E est contenu dans le noyau d'un opérateur polynômial, elliptique et autoadjoint. On a besoin du lemme technique suivant.

Lemme 3.2.1.1
Soit $P \in \mathbb{R}[X], P = X + a$ et $0 \leq q \leq r$. Si $\alpha \in \mathcal{S}^q$ satisfait (j_2) alors

$$\left[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\right]d_Hd_H^\star\alpha = 0.$$

Démonstration :
On applique successivement $\partial_H, \overline{\partial_H}$ à l'égalité $P(\Delta_H^T)(d_H^\star \alpha) = 0$. Nous obtenons par (2.2.2.1) :

$$\Big[P(\Delta_H^T) + i\mathcal{L}_R\Big](\partial_H d_H^\star \alpha) = 0$$
$$\Big[P(\Delta_H^T) - i\mathcal{L}_R\Big](\overline{\partial_H} d_H^\star \alpha) = 0.$$

En multipliant la première égalité par $P(\Delta_H^T) - i\mathcal{L}_R$, la deuxième par $P(\Delta_H^T) + i\mathcal{L}_R$ et en en faisant la somme on arrive au résultat ■

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant.

Proposition 3.2.1.1
Soit $\alpha \in E$. Nous avons :

3.2.1.1 $$(P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2)(QR)(\Delta_H^T)\alpha = 0$$

Démonstration :
On applique $P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2$ à (j_3) et on utilise le lemme 3.2.1.1 ■

Donc E est un espace de dimension finie, car sous-espace du noyau d'un opérateur elliptique agissant sur les sections d'un fibré vectoriel au-dessus d'une variété compacte.

Remarque 3.2.1.2
De manière intuitive, l'équation (3.2.1.1) nous montre qu'il est possible détablir un PSV dans le spectre de Δ_{g_T}. Comme il sera établi au paragraphe 4.3, si λ est une valeur propre de Δ_{g_T}, avec forme propre (α, β), alors certaines composantes de α vérifient des équations du type (3.2.1.1) avec P, Q, R explicitement calculés en fonction de λ. Autrement dit, les valeurs propres du laplacien Δ_{g_T} sont parmi les solutions des équations du type

3.2.1.2 $$w(\mu, \lambda) = 0$$

où w est un polynôme et μ une valeur propre du laplacien Δ_H^T. Au niveau des formes propres, cela correspond aux résultats de décomposition des propositions 3.2.2.1 et 3.2.3.1. Ensuite, on se demande quelles valeurs, parmi les solutions des équations (3.2.1.2) sont effectivement des valeurs propres pour le laplacien Δ_{g_T}. Ce problème est résolu par les lemmes des paragraphes 3.3.2-3.3.4.

On se prépare maintenant à énoncer et démontrer les résultats concernant la décomposition (à isomorphisme près) de E en espaces plus simples.

Vu le fait que ce chapitre est concu comme un outil permettant d'établir un PSV dans le spectre de Δ_{g_T} (voir les théorèmes 4.2.1 et 4.2.3) notre premier but est de comprendre la structure de E en termes d'espaces propres du laplacien Δ_H^T. On recherche donc une décomposition de l'espace E, à isomorphisme près, dans une somme directe d'espaces du type suivant :

3.2.1.3 $Ker\Big[w(\Delta_H^T, \mathcal{L}_R)\Big], w \in \mathbb{C}[X, Y]$, *éventuellement en intersection avec un espace de la forme* $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp, \mathcal{P} \cap \mathcal{H}^\perp, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_1^\perp$

(ces restrictions seront des conséquences des conditions $(j_1) - (j_2)$ et $(j_4) - (j_6)$). Le travail à fournir est dû à la présence, dans l'équation (j_3), de l'opérateur $d_H d_H^\star$.

La technique employée pour décomposer E en espaces du type voulu consiste à utiliser l'équation (3.2.1.1). Nous allons faire des décompositions de Hodge par rapport à des facteurs bien choisis de l'opérateur qui figure en (3.2.1.1) et regarder, ensuite, ce que les conditions $(j_1) - (j_6)$ impliquent quant aux composantes de ces décompositions.

Dans le paragraphe qui suit nous allons réaliser une première partie de ce programme.

3.2.2 Une première décomposition de E

On va clarifier partiellement la structure de l'espace E. Plus précisément nous allons démontrer le résultat suivant.

Proposition 3.2.2.1
Nous avons une décomposition en somme directe orthogonale :

3.2.2.1
$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus I_1.$$

Les espaces E_1, E_2, I_1 sont introduits dans la définition ci-dessous.

Définition 3.2.2.1
Soit $0 \leq q \leq r$. Nous définissons alors :

3.2.2.2
$$E_1 = Ker\left[Q(\Delta_H^T)\right] \cap \mathcal{P}^q \cap \mathcal{H}^\perp$$

3.2.2.3
$$E_2 = Ker\left[R(\Delta_H^T)\right] \cap \mathcal{P}^q \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp$$

L'espace "intermédiaire" I_1, est défini comme étant l'espace des formes $\alpha \in \mathcal{S}^q$ qui vérifient $(j_1) - (j_2)$ ainsi que :

3.2.2.4
$$\begin{aligned} &(i_1)\ (P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2)\alpha = 0 \\ &(i_2)\ (r-q)P(\Delta_H^T)\alpha + d_H^\star d_H \alpha = 0. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.2.1
Les espaces E_1 et E_2 sont du type (3.2.1.3). De plus, la dérivée de Lie $\mathcal{L}_R$ ne figure pas dans la définition de ces espaces. On peut donc exprimer ces espaces en fonctions des espaces propres du laplacien Δ_H^T, avec les restrictions imposées par la définition 3.2.2.1.

La démonstration de la proposition 3.2.2.1 va s'articuler autour du lemme suivant, qui précise quelques propriétés des espaces E_1, E_2, I_1.

Dans la suite de ce chapitre nous allons supposer que $q < r$.

Lemme 3.2.2.1
(i) Nous avons l'inclusion :

3.2.2.5 $$E_2 \subseteq Im\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big].$$

(ii) La somme $E_1 \oplus E_2 \oplus I_1$ est directe et contenue dans E.

Pour l'instant nous allons admettre le résultat du lemme précédent qui sera démontré à la fin de ce paragraphe. Ce faisant, nous pouvons donner la preuve de la proposition 3.2.2.1.

Démonstration de la proposition 3.2.2.1
Soit $U : E \to \Lambda^q(H)$ l'opérateur défini par

$$U := (r-q)P(\Delta_H^T) + d_H^\star d_H.$$

Définissons

$$E_0 := \{\alpha \in \mathcal{P}^q \cap \mathcal{H}^\perp : (QR)(\Delta_H^T)\alpha = 0, Q(\Delta_H^T)\alpha \in \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp\}.$$

Nous allons montrer que $U(E) \subseteq E_0$.

Soit $\alpha \in E$. Tout d'abord, comme $d_H\alpha$ est primitive (par (j_1)) nous avons que $U\alpha \in \mathcal{S}^q$. Nous allons montrer que $U\alpha \in \mathcal{P}^q$. Rappelons d'abord que (cf. 2.2.2.4)

$$[P(\Delta_H^T), d_H^\star] = (-1)^q \mathcal{L}_R(Jd_H^\star J).$$

Par conséquent nous avons

$$d_H^\star P(\Delta_H^T)\alpha = 0$$

par (j_1) et (j_2) et

$$d_H^\star JP(\Delta_H^T)\alpha = -\mathcal{L}_R(Jd_H^\star\alpha)$$

par j_1. On en déduit que

$$d_H^\star U\alpha = (r-q)d_H^\star P(\Delta_H^T) + (d_H^\star)^2 d_H\alpha = \mathcal{L}_R L^\star(d_H\alpha) = 0.$$

De la même manière

$$d_H^\star J(U\alpha) = -(r-q)\mathcal{L}_R(Jd_H^\star\alpha) + d_H^\star Jd_H^\star d_H\alpha.$$

Or

$$d_H^\star Jd_H^\star d_H\alpha = (-1)^{q-1}J(Jd_H^\star)^2 d_H\alpha = (-1)^{q-1}J(d_H^\star J)^2 d_H\alpha =$$
$$= (-1)^{q-1}Jd_H^\star\Big[(Jd_H^\star J)d_H\alpha\Big] = (r-q)\mathcal{L}_R d_H^\star\alpha$$

par (2.2.18) et (j_1). Il vient que $d_H^\star J(U\alpha) = 0$ et donc $U\alpha \in \mathcal{P}^q$.

L'identité (j_3) étant équivalente à

3.2.2.6 $$Q(\Delta_H^T)\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]\alpha = T^2Q(\Delta_H^T)(U\alpha)$$

par (3.2.1.1) nous obtenons que $U\alpha \in Ker(QR)(\Delta_H^T)$.

Il nous reste à prouver que $U\alpha \in \mathcal{H}^\perp$. L'application de $P(\Delta_H^T) + i\mathcal{L}_R$ à (j_5) resp. $P(\Delta_H^T) - i\mathcal{L}_R$ à (j_6) nous donne moyennant (3.2.2.6) que

$$Q(\Delta_H^T)U\alpha \in \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp.$$

Puisque $d_H^\star d_H \alpha \in \mathcal{H}^\perp$, par (j_4) nous avons que $U\alpha \in \mathcal{H}^\perp$, ce qui achève la preuve du fait que $U(E) \subseteq E_0$.

On va maintenant calculer le noyau de l'application $U : E \to E_0$. Il est immédiat de remarquer que

$$I_1 \subseteq Ker(U).$$

Nous allons montrer qu'il y a égalité. Soit $\alpha \in E$ telle que $U\alpha = 0$. Alors α satisfait automatiquement les conditions (j_1), (j_2), (i_2). Pour que α soit dans I_1 il nous reste à voir que α satisfait (i_1), fait que nous allons établir dans ce qui suit.

Comme $d_H d_H^\star \alpha \in Ker\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]$ (par le lemme 3.2.1.1) on obtient en appliquant $P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2$ à (j_3) que

$$\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]((r-q)P(\Delta_H^T)\alpha + \Delta_H\alpha) = 0.$$

Par (3.2.2.6) nous avons

$$Q(\Delta_H^T)\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]\alpha = 0.$$

La soustraction de ces deux relations nous conduit à

$$\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]((r-q)b + \Delta_H)\alpha = 0.$$

L'opérateur $(r-q)b + \Delta_H$ étant positif ($b \geq 0$) ceci entraine que

$$\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]\alpha \in \mathcal{H}.$$

Mais $P(\Delta_H^T)\alpha \in \mathcal{H}^\perp$ par (j_4) et $\mathcal{L}_R\alpha \in \mathcal{H}^\perp$ (car $\mathcal{L}_R(\mathcal{H}) = 0$ à cause du fait que $q < r$). Nous avons donc $(P^2 + \mathcal{L}_R^2)(\Delta_H^T)\alpha = 0$, c'est à dire que α satifait (i_1).

On a montré que $Ker(U) \subseteq I_1$, donc $Ker(U) = I_1$. En résumé, nous avons montré l'existence d'une suite exacte

$$0 \to I_1 \to E \overset{U}{\to} E_0.$$

Une conséquence en est que

$$dimE \leq dimE_0 + dimI_1.$$

Concernant l'espace E_0 il est immédiat d'établir l'exactitude de la suite

$$0 \to E_1 \hookrightarrow E_0 \overset{Q(\Delta_H^T)}{\to} E_2.$$

On en déduit

$$dimE_0 \leq dimE_1 + dimE_2,$$

donc

$$dimE \leq dimE_1 + dimE_2 + dimI_1.$$

Nous achevons la preuve de manière évidente par le lemme 3.2.2.1, (ii) ■

Il nous reste à démontrer le lemme 3.2.2.1. Ce lemme nécessite également un lemme préparatoire, que nous allons énoncer et prouver. On va donner à la fin la preuve du lemme 3.2.2.1.

Lemme 3.2.2.2
Soit $P \in \mathbb{R}[X], P = X + a$ et $0 \leq q \leq r$.
(i) Soit $\alpha \in \mathcal{S}^q$, vérifiant les conditions (j_1) et (j_2). On considère la décomposition de Hodge (par rapport à l'opérateur elliptique et autoadjoint $P^2(\Delta_H^T) + (\mathcal{L}_R)^2$)

$$\alpha = \alpha^1 + \alpha^2$$

avec $\alpha^1 \in Ker\left[P^2(\Delta_H^T) + (\mathcal{L}_R)^2\right]$ et $\alpha^2 \in Im\left[P^2(\Delta_H^T) + (\mathcal{L}_R)^2)\right]$. Alors α^2 appartient à $\mathcal{P}^q$ et $d_H d_H^\star \alpha^1$ à $Ker\left[P^2(\Delta_H^T) + (\mathcal{L}_R)^2\right]$.
(ii) Dans les hypothèses de (ii), si $\alpha \in \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp$ il en est de même pour α^1.

Démonstration :
(i) Par (2.2.2.1) on a que

$$\partial_H^\star \alpha^1 \in Ker\ P(\Delta_H^T)\Big[P(\Delta_H^T) - 2i\mathcal{L}_R)\Big]$$
$$\partial_H^\star \alpha^2 \in Im\ P(\Delta_H^T)\Big[P(\Delta_H^T) - 2i\mathcal{L}_R\Big]$$

Comme $P(\Delta_H^T)\partial_H^\star \alpha = 0$ et $P(\Delta_H^T)$ préserve la décomposition de Hodge de $P(P - 2i\mathcal{L}_R)(\Delta_H^T)$ nous avons $P(\Delta_H^T)\partial_H^\star \alpha^2 = 0$, c'est à dire $\partial_H^\star \alpha^2 \in KerP(\Delta_H^T)$. Or

$$KerP(\Delta_H^T) \subseteq KerP(\Delta_H^T)\Big[P(\Delta_H^T) - 2i\mathcal{L}_R\Big]$$

donc $\partial_H^\star \alpha^2 = 0$. Par un argument similaire on obtient que $\overline{\partial}_H^\star \alpha^2 = 0$ d' où $\alpha^2 \in \mathcal{P}^q$. Pour la deuxième assertion, notons que $P(\Delta_H^T) d_H^\star \alpha^1 = 0$, car $d_H^\star \alpha^2 = 0$. On applique le lemme 3.2.1.1.
(ii) Montrons par exemple que $\alpha \in \mathcal{H}_1^\perp$ implique $\alpha_1 \in \mathcal{H}_1^\perp$ (la preuve de l'autre assertion est complètement analogue). Soit $h \in \mathcal{H}_1$.
Nous décomposons

$$h = h_1 + h_2$$

avec $h_1 \in Ker\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]$ et $h_2 \in Im\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]$. Comme $\Delta_{\overline{\partial_H}}$ commute avec $P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2$, nous avons que $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_1$. En tenant compte du fait que $Ker\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]$ et $Im\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]$ sont perpendiculaires nous avons :

$$\int_M < h, \alpha_1 >= \int_M < h_1, \alpha_1 >= \int_M < h_1, \alpha >= 0$$

car $h_1 \in \mathcal{H}_1$ et $\alpha \in \mathcal{H}_1^{\perp}$ ■

Démonstration du lemme 3.2.2.1 :
(i) Soit $\alpha \in E_2$. Nous décomposons

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

avec $\alpha_1 \in Ker\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]$ et $\alpha_2 \in Im\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]$. Nous avons alors

$$\alpha_2 \in \mathcal{P}^q \cap \mathcal{H}_1^{\perp} \cap \mathcal{H}_2^{\perp}$$

par le lemme 3.2.2.2, (i) et (ii). Il vient, par la définition de E_2, que $\alpha_1 \in \mathcal{P}^q \cap \mathcal{H}_1^{\perp} \cap \mathcal{H}_2^{\perp}$. De plus, comme $R(\Delta_H^T)$ préserve la décomposition de Hodge de $P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2$ nous avons, par la définition de E_2 que $\alpha_2 \in KerR(\Delta_H^T)$. Compte tenu de l'identité

3.2.2.7
$$\begin{aligned}&((r-q)P(\Delta_H^T) - \Delta_H)\Big[R(\Delta_H^T) - (P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2)\Big] = \\ &= -T^2(r-q)^2(P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2) + 4T^2\Delta_{\partial_H}\Delta_{\overline{\partial_H}}\end{aligned}$$

nous arrivons à

$$\Delta_{\partial_H}\Delta_{\overline{\partial_H}}\alpha_1 = 0$$

autrement dit $\Delta_{\overline{\partial_H}}\alpha_1 \in \mathcal{H}_2$. Or α_1 est orthogonale à $\mathcal{H}_2$, ce qui implique $< \Delta_{\overline{\partial_H}}\alpha_1, \alpha_1 >_{L^2} = 0$. Il vient que $\alpha_1 \in \mathcal{H}_1$ d'où $\alpha_1 = 0$ (car on avait déja $\alpha_1 \in \mathcal{H}_1^{\perp}$).
(ii) Supposons que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

avec $\alpha_i \in E_i, i = \overline{1,2}, \alpha_3 \in I_1$. Nous avons donc, par application de $Q(\Delta_H^T)\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]$ et en tenant compte des définitions des espaces E_1, I_1 :

$$Q(\Delta_H^T)\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]\alpha_2 = 0.$$

Or α_2 donc $Q(\Delta_H^T)$ sont dans $Im\Big[P^2(\Delta_H^T) + \mathcal{L}_R^2\Big]$ par le lemme 3.2.2.1, (i). Il vient que

$$Q(\Delta_H^T)\alpha_2 = 0.$$

Comme $\alpha_2 \in KerR(\Delta_H^T)$ (par la définition de E_2) ceci entraine par "division" de $R(\Delta_H^T)$ à $Q(\Delta_H^T)$ que

$$b(b - T^2(r-q))\alpha_2 = T^2\Delta_H^T\alpha_2.$$

Puisque $b(b - T^2(r-q)) \leq 0$ nous devons avoir $\Delta_H^T\alpha_2 = 0$ donc $\alpha_2 \in \mathcal{H} \cap Ker\mathcal{L}_R$. Or

$$\mathcal{H} \cap Ker \cap L_R \subseteq \mathcal{H}_1$$

(vérification immédiate) d'où $\alpha_1 \in \mathcal{H}_1$. La forme α_2 étant orthogonale aux espaces $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ il faut que $\alpha_2 = 0$.

Ensuite, puisque $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ nous avons $\alpha_3 \in E_1$. En particulier le fait que $d_H^\star \alpha_3 = 0$ implique que (i_2) s'écrit

$$(r-q)P(\Delta_H^T)\alpha_3 + \Delta_H \alpha_3 = 0.$$

Compte tenu du fait que $\alpha_3 \in KerQ(\Delta_H^T)$ on arrive à

$$(r-q)b\alpha_3 + \Delta_H \alpha_3 = 0.$$

Car $b \geq 0$ on a donc $\alpha_3 \in \mathcal{H}$ d'où $\alpha_3 = 0$ par la définition de E_1.

Nous avons montré que la somme $E_1 \oplus E_2 \oplus I_1$ est directe. Concernant la deuxième partie de l'énnoncé il est évident que E_1, E_2 sont contenus dans E.

Soit $\alpha \in I_1$. Visiblement, α vérifie $(j_1) - (j_3)$. La condition (j_4) est satifaite car (cf.(i_2))

$$P(\Delta_H^T)\alpha = -\frac{1}{r-q} d_H^\star d_H \alpha \in \mathcal{H}^\perp.$$

Quant à $(j_4) - (j_5)$ notons que (i_2) s'écrit de manière équivalente :

$$(r-q)(P(\Delta_H^T) - i\mathcal{L}_R)\alpha + 2\Delta_{\overline{\partial_H}}\alpha = d_H d_H^\star \alpha$$
$$(r-q)(P(\Delta_H^T) + i\mathcal{L}_R)\alpha + 2\Delta_{\partial_H}\alpha = d_H d_H^\star \alpha.$$

Vu que $Imd_H \subseteq \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp$ (à cause du fait, établi en (2.3.4), que $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ sont des sous-espaces de $\mathcal{P}$) on en déduit que

$$(P(\Delta_H^T) - i\mathcal{L}_R)\alpha \in \mathcal{H}_1^\perp$$
$$(P(\Delta_H^T) + i\mathcal{L}_R)\alpha \in \mathcal{H}_2^\perp$$

donc α vérifie (j_5) et (j_6). Nous avons montré que $\alpha \in I_1$ ■

3.2.3 L'espace I_1

Rappelons qu'a l'aide de la proposition 3.2.2.1 nous avons obtenu une première décomposition de E comme suit :

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus I_1.$$

Or, I_1 n'est pas du type (3.2.1.3). Afin de pouvoir donner un résultat complet sur la structure de E il nous faut donc étudier l'espace I_1. Dans ce paragraphe nous allons prouver le résultat suivant.

Proposition 3.2.3.1
Il existe un isomorphisme

3.2.3.1 $$I_1 \cong E_3 \oplus E_3' \oplus E_3''.$$

Les espaces E_3, E_3', E_3'' sont définis ci-dessous.

Définition 3.2.3.1
Introduisons trois espaces par :

3.2.3.2

$$\begin{aligned} E_3 &:= \mathcal{P}^{q-1} \cap \mathcal{H}_1^{\perp} \cap \mathcal{H}_2^{\perp} \cap Ker\, P(\Delta_H^T) \\ E_3' &:= Ker\Big[P(\Delta_H^T) - i\mathcal{L}_R\Big] \cap \mathcal{H}_1 \\ E_3'' &:= Ker\Big[P(\Delta_H^T) + i\mathcal{L}_R\Big] \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_1^{\perp}. \end{aligned}$$

Bien clairement les espaces ci-dessus sont du type (3.2.1.3). Au cours de la démonstration de notre proposition nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 3.2.3.1
Soit $\alpha \in \mathcal{S}^q$ telle que $\Delta_{\partial_H}\alpha \in \mathcal{P}^q$ ou $\Delta_{\overline{\partial_H}}\alpha \in \mathcal{P}^q$. Alors $\alpha \in \mathcal{P}^q$.

La démonstration de ce lemme sera donnée, pour la complétude, à la fin de ce paragraphe. Donnons d'abord la preuve de notre résultat principal.

Démonstration de la proposition 3.2.3.1
Soit $\alpha \in I_1$. Comme $d_H^\star J\alpha = 0$ nous avons

$$d_H^\star \alpha = 2\partial_H^\star \alpha = 2\overline{\partial_H}^\star \alpha \in \mathcal{H}_1^{\perp} \cap \mathcal{H}_2^{\perp} \cap \mathcal{P}^{q-1}.$$

Par (j_2) on a que $d_H^\star \alpha \in E_3$. Nous avons donc une application bien définie

$$f : I_1 \to E_3, f = d_H^\star.$$

Il est immédiat de voir que le noyau de cette application est $E_3' \oplus E_3''$. Donc pour montrer (3.2.3.1) il suffit de voir que f est surjective.

En effet, soit $u \in E_3$. Posons

$$\alpha = \frac{1}{2}(\overline{\partial_H} u_1 + \partial_H u_2)$$

avec $u_1 = G^{\Delta_{\overline{\partial_H}}} u$ et $u_2 = G^{\Delta_{\partial_H}} u$. Par le lemme 3.2.3.1 on a que $u_1, u_2 \in \mathcal{P}^{q-1}$. Il vient alors que α est primitive. Nous avons alors

$$2\overline{\partial_H}^\star \alpha = \overline{\partial_H}^\star(\overline{\partial_H} u_1 + \partial_H u_2) = \Delta_{\overline{\partial_H}} u_1 = u$$

car $\overline{\partial_H}^\star u_1 = 0$ et $\overline{\partial_H}^\star \partial_H u_2 = -\partial_H \overline{\partial_H}^\star u_2 = 0$. De la même manière il vient que

$$2\partial_H^\star \alpha = u$$

donc

$$d_H^\star \alpha = u$$

et

$$d_H^\star (J\alpha) = 0.$$

Pour avoir $\alpha \in I_1$ il nous reste à vérifier que α satisfait (i_1) et (i_2).

• α satisfait (i_1)
Le fait que $u \in KerP(\Delta_H^T)$ implique que $u_1, u_2 \in KerP(\Delta_H^T)$ donc, par (2.2.2.1),

$$\overline{\partial_H} u_1 \in Ker\Big[P(\Delta_H^T) - i\mathcal{L}_R\Big]$$

et

$$\partial_H u_2 \in Ker\Big[P(\Delta_H^T) + i\mathcal{L}_R\Big].$$

Il en découle immédiatement que α satisfait (i_1).

• α satisfait (i_2)
Nous avons

$$\begin{aligned}&(r-q)P(\Delta_H^T) + d_H^\star d_H \alpha = (r-q)P(\Delta_H^T)\alpha + \Delta_H\alpha - d_H d_H^\star \alpha = \\ &= (r-q)P(\Delta_H^T)\alpha + \Delta_H\alpha - d_H u.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}&(r-q)P(\Delta_H^T)\alpha + \Delta_H\alpha = (r-q)P(\Delta_H^T)(\overline{\partial_H}u_1 + \partial_H u_2) - \Delta_H\alpha = \\ &= \tfrac{(r-q)i}{2}\mathcal{L}_R(\overline{\partial_H}u_1 - \partial_H u_2) + \Delta_H(\overline{\partial_H}u_1) + \tfrac{1}{2}\Delta_H(\partial_H u_1) = \\ &= \Delta_{\overline{\partial_H}}\overline{\partial_H}u_1 + \Delta_{\partial_H}\partial_H u_2 = \overline{\partial_H}u + \partial_H u = d_H u.\end{aligned}$$

Par conséquent notre α vérifie (i_1) et (i_2), donc f est est surjective ■

Finissons ce paragraphe avec :

Démonstration du lemme 3.2.3.1 :
Supposons que $\Delta_{\partial_H}\alpha \in \mathcal{P}^q$ (l'autre cas étant analogue). Donc $\partial_H^\star \Delta_{\partial_H}\alpha = 0$ et $\overline{\partial_H}^\star \Delta_{\partial_H}\alpha = 0$. Il vient clairement que $\partial_H^\star \alpha = 0$. Ensuite, puisque $\overline{\partial_H}^\star \Delta_{\partial_H} = (\Delta_{\partial_H} + i\mathcal{L}_R)\overline{\partial_H}^\star$ sur les q-formes, on obtient

$$(\Delta_{\partial_H} + i\mathcal{L}_R)\overline{\partial_H}^\star \alpha = 0.$$

Ceci entraine, par la positivité de Δ_{∂_H} que

$$\int_M < i\mathcal{L}_R\overline{\partial_H}^\star\alpha, \overline{\partial_H}^\star\alpha > \leq 0.$$

Or $\Delta_{\overline{\partial_H}} = \Delta_{\partial_H} + i(r-q+1)\mathcal{L}_R$ sur les $q-1$ formes, (cf. (2.2.1.10)) donc :

$$\Delta_{\overline{\partial_H}}(\overline{\partial_H}^\star\alpha) = i(r-q)\mathcal{L}_R\overline{\partial_H}^\star\alpha.$$

Il s'ensuit que $\int_M < \Delta_{\overline{\partial_H}}(\overline{\partial_H}^\star\alpha), \overline{\partial_H}^\star\alpha) > \leq 0$ d'où $\overline{\partial_H}^\star\alpha = 0$ ■

3.2.4 Résumé des résultats obtenus

Les propositions 3.2.2.1 et 3.2.3.1 nous donnent une décomposition, à isomorphisme près, de l'espace E comme suit

3.2.4.1 $$E \cong E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_3' \oplus E_3''.$$

La façon dont l'espace E est construit est maintenant clarifiée. Nous avons atteint notre but quant à la décomposition de E, car les espaces ci-dessus sont du type (3.2.1.3).

Désormais , de toute la discussion que avons faite sur E on retiendra uniquement ce résultat. Les espaces qui figurent dans la décomposition précédente sont beaucoup plus simples que l'espace E, comme le démontre la comparaison avec la définition 3.2.1.1. Comme nous l'avons remarqué auparavant, il s'agit d'espaces propres du laplacien Δ_H^T, sujet à certaines restrictions.

Nous pouvons passer à la deuxième partie de notre étude de l'espace E.

3.3 La réalisation de l'espace E

3.3.1 Quelques définitions

Nous allons maintenant faire la liaison entre l'espace E et les espaces propres du laplacien $\Delta_{g_T}, T > 0$ fixé. Vu la décomposition 3.2.4.1 nous allons plonger les espaces $E_1, E_2, E_3, E_3', E_3''$ dans des espaces propres du laplacien Δ_{g_T}. Ces plongement vont avoir des propriétés relatives à la décomposition de Lefschetz. L'intérêt de ceci réside dans le fait que l'espace des formes qui vérifient les conditions $(j_1) - (j_6)$ du début de cette section pourra être vu comme constitué de formes propres du laplacien Δ_{g_T} ; ces plongements joueront un rôle crucial dans la preuve de notre résultat principal (voir le chapitre 4, section 4.3).

Nous allons préciser maintenant notre programme. Posons d'abord :

Définition 3.3.1.1
Lorsque $p \geq 0$ soit

$$E_\lambda(\Delta_{g_T}^p)$$

l'espace propre du laplacien Δ_{g_T} associé à la valeur propre λ.

Si F est l'un des espace $E_1, E_2, E_3, E_3', E_3''$ et $s \geq 0$ nous allons construire des plongements linéaires

3.3.1.1 $$f : F \to E_{\lambda(T)}(\Delta_{g_T}^{2s+2+q})$$

et

3.3.1.2 $$g : F \to E_{\mu(T)}(\Delta_{g_T}^{2s+1+q})$$

où $\lambda(T)$ et $\mu(T)$ seront déterminés explicitement.

Nous allons donc donner une méthode permettant d'obtenir des formes propres du laplacien Δ_{g_T}, pour des valeurs propres que nous calculons, à partir de formes et valeurs propres du laplacien Δ_H^T.

L'importance de ces plongements réside dans le fait que déterminer la structure d'un espace propre du laplacien Δ_{g_T} reviendra à prouver que toutes les formes propres du laplacien Δ_{g_T} s'obtiennent moyennant cette méthode. Ceci sera fait dans la section 4.3, où l'on utilisera une autre propriété cruciale des plongements f et g. Nous allons énoncer brièvement cette propriété, au signe près. Les énoncés précis seront donnés plus tard.

(i) Si $\alpha \in F$, alors le premier facteur (dans la décomposition 2.1.2) de $f(\alpha)$ a comme $s+1$-ième composante dans la décomposition de Lefschetz la forme α.
(ii) Si $\alpha \in F$ alors le premier facteur de $g(\alpha)$ a 0 comme $s+1$-ième composante dans la décomposition de Lefschetz. La s-ième composante de la décomposition de Lefschetz du deuxième facteur de $g(\alpha)$ est égale à α (où $J\alpha$).

Nous allons aussi positionner les images de f et g par rapport aux espaces des formes fermées resp. cofermées.

Donnons un aperçu de l'idée technique qui nous permettra de construire ces plongements dans le cas des 1-formes k-équivariantes. Si $f \in C^\infty(M)$ est une fonction propre k-équivariante pour le laplacien horizontal, nous cherchons une 1-forme horizontale α telle que $\alpha + f \cdot \theta$ soit propre pour Δ_{g_T}. Une façon de construire α à partir de f est de poser

$$\alpha = c_1 J d_H f + c_2 d_H f$$

et de déterminer les coefficients c_1, c_2 pour que α soit propre pour Δ_{g_T}.

Bien sûr, lorqu'il s'agit de p-formes, $p \geq 2$, la situation est plus compliquée, mais le principe restera le même.

Désormais nous allons identifier l'espace des p-formes sur M avec des couples de la forme (α, β) où $\alpha \in \Lambda^p(H), \beta \in \Lambda^{p-1}(H)$. Afin de pouvoir formaliser les idées ci-dessus nous introduisons un nouveau type de formes différentielles sur M par

Définition 3.3.1.2
Soit $r-1 \geq p \geq 0$ et $p \geq s \geq 0$ fixé.
(i) Soit $\mathcal{T}_p^s$ l'espace des p-formes différentielles sur M, (α, β), qui possédent une décomposition de Lefschetz de la forme

$$\alpha = \sum_{i=0}^{s+1} L^i \alpha_i$$
$$\beta = \sum_{j=0}^{s} L^j \beta_j.$$

(ii) Nous définissons également des projections :

$$\Pi^1 : \mathcal{T}_p^s \to \mathcal{S}^{p-2s-2}, \Pi^1(\alpha, \beta) := \alpha_{s+1}$$
$$\Pi^2 : \mathcal{T}_p^s \to \mathcal{S}^{p-2s-1}, \Pi^2(\alpha, \beta) := \beta_s.$$

(iii) Finalement, nous posons

$$\mathcal{R}_p^s = \mathcal{T}_p^s \cap Ker\ \Pi^1.$$

Dans la suite nous serons concernés la plupart du temps avec des formes de degré pair. Faisons quelques remarques dans ce cas.

Remarque 3.3.1.1
(i) Lorsque $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$, il convient de supposer, dans la définition précédente des espaces $\mathcal{T}_{2p+2}^s$, que $2p+1-r \leq s \leq p$; la sommation sera faite alors sur $2p+2-r \leq i \leq s+1$ et

$2p+1-r \leq s \leq s$. Ceci en raison de la décomposition de Lefschetz (2.2.8) et de la formule (2.2.7). Cette convention sera faite implicitement par la suite.
(ii) Les espaces $\mathcal{T}_p^s$ sont préservés par tout opérateur qui commute avec L et $L^\star$.

L'utilité première des espaces $\mathcal{T}_{2p+2}^s$ est qu'il réalisent une filtration de $\Lambda^{2p+2}(M)$:

$$\mathcal{T}_{2p+2}^0 \subseteq \mathcal{T}_{2p+2}^1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{T}_{2p+2}^p = \Lambda^{2p+2}(M).$$

Cette propriété sera importante pour le mécanisme récursif de la preuve du théorème 4.1.1 (voir la section 4.2). Ensuite, nous avons l'inclusion évidente

$$\mathcal{R}_p^s \subseteq \mathcal{T}_p^s$$

ainsi qu'une filtration

$$\mathcal{S}^{2p+1} = \mathcal{R}_{2p+2}^0 \subseteq \mathcal{R}_{2p+1}^1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}_{2p+2}^p \ .$$

Nous pouvons maintenant commencer les calculs qui nous permettront de réaliser l'espace E.

3.3.2 Réalisation de l'espace I_1

Nous allons énoncer et démontrer le lemme de "réalisation" pour l'espace I_1. On a commencé par cet espace car les calculs ultérieurs seront semblables à celui que nous allons faire maintenant, ce qui permettra des analogies utiles. Cela explique les notations qu'on a adoptées pour les applications qui réalisent le plongement de I_1 dans des espaces propres de Δ_{g_T}.

Lemme 3.3.2.1
Soit $s \geq 0$ fixé. Posons

$$\lambda_3(T) = T^2(s+1)(r-q-s) - a \ .$$

Nous avons des applications linéaires :
(i)

3.3.2.1
$$\begin{array}{l} f_3^s : I_1 \to E_{\lambda_3(T)}(\Delta_{g_T}^{2s+2+q}) \cap Im\ d \\ f_3^s(u) := d((L^s u) \wedge \theta) \end{array}$$

Si $u \in I_1$ alors $f_3^s(u) \in \mathcal{T}_{2s+2+q}^s$ avec

$$\Pi^1(f_3^s(u)) = (-1)^q u.$$

(ii)

3.3.2.2
$$\begin{array}{l} g_3^s : I_1 \to E_{\lambda_3(T)}(\Delta_{g_T}^{2s+1+q}) \cap Im\ d_{g_T}^\star \\ g_3^s(u) := d_{g_T}^\star(L^{s+1} Ju)). \end{array}$$

Lorsque $u \in I_1$ nous avons $g_3^s(u) \in \mathcal{R}_{2s+1+q}^s$ et

$$\Pi^2(g_3^s(u)) = (-1)^q Ju.$$

La preuve de résultat, ainsi que celle des résultats analogues des deux sections suivantes est un long calcul. De plus, nous avons besoin d'un lemme préparatoire qu'on va énoncer et prouver. La démonstration du lemme 3.3.2.1 sera donnée à la fin du paragraphe.

Lemme 3.3.2.2
Soit $\alpha \in I_1, q < r$. Nous avons les identités :

3.3.2.3 $$(d_H J)^2 \alpha = (-1)^q L\Big[P(\Delta_H^T)\alpha\Big].$$

3.3.2.4 $$d_H P(\Delta_H^T)\alpha + (-1)^q \mathcal{L}_R (J d_H J)\alpha = 0.$$

Démonstration :
Nous allons nous servir de la description de I_1 donnée par la preuve de la proposition 3.2.3.1. Les élements de E_3' et E_3'' vérifient visiblement (3.3.2.3). Nous prenons maintenant α de la forme

$$\alpha = \frac{1}{2}(\overline{\partial_H} u_1 + \partial_H u_2)$$

avec $u_1 = G^{\Delta_{\overline{\partial_H}}} u, u_2 = G^{\Delta_{\partial_H}} u$ où $u \in E_3$. On a alors

$$2(d_H J)^2 \alpha = 2(J d_H)^2 \alpha = (J d_H)^2 \overline{\partial_H} u_1 + (J d_H)^2 \partial_H u_2.$$

Or

$$(J d_H)^2 \overline{\partial_H} u_1 = (J d_H J) d_H \overline{\partial_H} u_1 = (J d_H J) \partial_H \overline{\partial_H} u_1.$$

Comme sur les $q+1$-formes nous avons $\overline{\partial_H} - \partial_H = (-1)^q i J d_H J$ on en tire

$$(J d_H)^2 \overline{\partial_H} u_1 = (-1)^{q+1} i \overline{\partial_H} \partial_H \overline{\partial_H} u_1 = (-1)^{q+1} i \overline{\partial_H} \{\partial_H, \overline{\partial_H}\} u_1 = (-1)^q i L \mathcal{L}_R \overline{\partial_H} u_1.$$

Nous avons vu dans la preuve de la proposition 3.2.3.1 que

$$\overline{\partial_H} u_1 \in Ker\Big[P(\Delta_H^T) - i\mathcal{L}_R\Big]$$

donc

$$(J d_H)^2 \overline{\partial_H} u_1 = (-1)^q L\Big[P(\Delta_H^T)(\overline{\partial_H} u_1)\Big].$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned}(J d_H)^2 \partial_H u_2 &= (J d_H J)\overline{\partial_H} \partial_H u_2 = (-1)^q i \partial_H \overline{\partial_H} \partial_H u_2 = (-1)^q i \partial_H \{\overline{\partial_H}, \partial_H\} u_2 = \\ &= (-1)^{q+1} i L \mathcal{L}_R \partial_H u_2 = (-1)^q i L P(\Delta_H^T) u_2\end{aligned}$$

car $u_2 \in Ker\Big[P(\Delta_H^T) + i\mathcal{L}_R\Big]$. La formule (3.3.2.3) vient maintenant facilement.

Démontrons maintenant (3.3.2.4.). Il est facile de remarquer que cette formule est équivalente à

$$P(\Delta_H^T) d_H \alpha = 0.$$

Nous allons omettre les détails, car la preuve de ce fait est formellement identique à ce que nous avons fait précédemment ■

Démonstration du lemme 3.3.2.1 :
(i) Nous allons montrer que $f_3^s(u)$ est propre pour tout $u \in I_1$. Nous avons

$$\Delta_{g_T}(L^s u \wedge \theta) = \begin{pmatrix} \Delta_H^T + T^2 LL^\star & -Jd_H J \\ T^2 Jd_H^\star J & \Delta_H^T + T^2 L^\star L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ L^s u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -L^s(Jd_H J)u \\ L^s(\Delta_H^T u) + T^2 L^\star L^{s+1} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L^s(Jd_H J)u \\ L^s(P(\Delta_H^T)u) \end{pmatrix} + \lambda_3(T) \begin{pmatrix} 0 \\ L^s u \end{pmatrix}$$

par (2.2.6) et le fait que u est primitive. Par conséquent :

$$(\Delta_{g_T} - \lambda_3(T)) f_3^s(u) = d \begin{pmatrix} -L^s(Jd_H J)u \\ L^s P(\Delta_H^T)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_H & (-1)^q L \\ (-1)^{q+1}\mathcal{L}_R & d_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -L^s(Jd_H J)u \\ L^s P(\Delta_H^T)u \end{pmatrix} =$$

$$= L^s \begin{pmatrix} -(d_H J)^2 u + (-1)^q L P(\Delta_H^T)u \\ (-1)^q \mathcal{L}_R (Jd_H J)u + d_H P(\Delta_H^T)u \end{pmatrix} = 0$$

par (3.3.2.3) et (3.3.2.4).

Regardons la décomposition de Lefschetz de $f_3^s(u)$. Nous avons

$$f_3^s(u) = d \begin{pmatrix} 0 \\ L^s u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_H & (-1)^q L \\ (-1)^{q+1}\mathcal{L}_R & d_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ L^s u \end{pmatrix} =$$
$$= (-1)^q L^{s+1} u + L^s(d_H u) \wedge \theta.$$

Or $d_H u$ est primitive à cause du fait que $d_H^\star J u = 0$. Ceci montre à la fois que $f_3^s(u) \in \mathcal{T}_{2s+2+q}^s$ et que

$$\Pi^1(f_3^s(u)) = (-1)^q u.$$

(ii) Soit $u \in I_1$. On a

$$\Delta_{g_T} L^{s+1} Ju = \begin{pmatrix} \Delta_H^T + T^2 LL^\star & -Jd_H J \\ T^2 Jd_H^\star J & \Delta_H^T + T^2 L^\star L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{s+1} Ju \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} L^{s+1}(P(\Delta_H^T)Ju) \\ T^2(Jd_H^\star J)L^{s+1} Ju \end{pmatrix} + \lambda_3(T) \begin{pmatrix} L^{s+1} Ju \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient que

$$(\Delta_{g_T} - \lambda_3(T)) g_3^s(u) = d_{g_T}^\star \begin{pmatrix} L^{s+1}(P(\Delta_H^T)Ju) \\ T^2(Jd_H^\star J)L^{s+1} Ju \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_H^\star & \frac{(-1)^q}{T^2}\mathcal{L}_R \\ (-)^q T^2 L^\star & d_H^\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{s+1}(P(\Delta_H^T)Ju) \\ T^2(Jd_H^\star J)L^{s+1} Ju \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (d_H^\star L^{s+1})\Big[P(\Delta_H^T)(Ju)\Big] + \mathcal{L}_R J(d_H^\star L^{s+1})u \\ (-1)^q T^2(s+1)(r-q-s)L^s(P(\Delta_H^T)Ju) + T^2(d_H^\star J)^2 L^{s+1}(Ju) \end{pmatrix}$$

par (2.2.6). Or

$$(d_H^\star L^{s+1})\Big[P(\Delta_H^T)(Ju)\Big] = L^{s+1}\Big[d_H^\star P(\Delta_H^T)Ju\Big] - (s+1)L^s J d_H P(\Delta_H^T)u =$$
$$= L^{s+1}\Big[d_H^\star P(\Delta_H^T)Ju\Big] - (s+1)\mathcal{L}_R L^s(d_H Ju)$$

par (2.2.17) et (3.3.2.4). Egalement par (2.2.17) nous avons

$$d_H^\star L^{s+1}u = L^{s+1}d_H^\star u + (-1)^{q+1}(s+1)L^s(Jd_H J)u$$

donc

$$(d_H^\star L^{s+1})\Big[P(\Delta_H^T)(Ju)\Big] + \mathcal{L}_R J(d_H^\star L^{s+1})u = L^{s+1}\Big[d_H^\star P(\Delta_H^T)Ju\Big] + L^{s+1}\mathcal{L}_R J d_H^\star u = 0$$

car Ju est horizontalement cofermée.

De nouveau par (2.2.17) et $d_H^\star(Ju) = 0$ on obtient

$$(d_H^\star J)^2 L^{s+1}Ju = (Jd_H^\star)^2 L^{s+1}Ju =$$
$$= (Jd_H^\star J)(d_H^\star L^{s+1})Ju = (-1)^q(s+1)J(d_H^\star L^s)(d_H u) =$$
$$= (-1)^q(s+1)JL^s(d_H^\star d_H u) + s(s+1)JL^(s-1)(Jd_H)^2 u.$$

En nous servant de (3.3.2.4) et du fait que u vérifie (i_2) il vient que

$$(d_H^\star J)^2 L^{s+1}Ju = (-1)^{q+1}(s+1)(r-q-s)L^s P(\Delta_H^T)Ju$$

donc

$$g_3^s(u) \in E_{\lambda_3(T)}(\Delta_{g_T}^{q+2s+2}).$$

Concernant la décomposition de Lefschetz de $g_3^s(u)$ nous avons

$$g_3^s(u) = d_{g_T}^\star \begin{pmatrix} L^{s+1}Ju \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_H^\star & \frac{(-1)^q}{T^2}\mathcal{L}_R \\ (-1)^q T^2 L^\star & d_H^\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{s+1}Ju \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (d_H^\star L^{s+1})Ju \\ (-1)^q T^2 L^\star L^{s+1}Ju \end{pmatrix} = -(s+1)L^s(Jd_H u) + (-1)^q T^2(s+1)(r-q-s)L^s(Ju)\wedge\theta.$$

Or $d_H u$ est une forme primitive ce qui permet de conclure aisément ■

3.3.3 Réalisation de l'espace E_1

Nous allons énoncer et démontrer un résultat analogue au lemme 3.3.2.1, pour les espaces du type E_1. La preuve sera faite par calcul direct, en tous points similaire à celui du paragraphe antérieur.

Lemme 3.3.3.1
Soit $s \geq 0$ fixé. Posons

$$\begin{aligned}\lambda_1(T) &= T^2(s+1)(r-q-s-1) - a + b\\ \mu_1(T) &= T^2 s(r-q-s) - a + b.\end{aligned}$$

Nous avons des applications linéaires
(i)

$$f_1^s : E_1 \to E_{\lambda_1(T)}(\Delta_{g_T}^{q+2s+2}) \cap Imd_{g_T}^\star$$

définie lorsque $r-q-s-1 \neq 0$ par

3.3.3.1 $$f_1^s := \tfrac{r-q}{r-q-s-1} d_{g_T}^\star L^{s+1} d_H G^{\Delta_H}.$$

Si $u \in E_1$ alors

$$f_1^s(u) \in \mathcal{T}_{q+2s+2}^s \text{ et } \Pi^1(f_1^s(u)) = u.$$

(ii)

3.3.3.2 $$\begin{aligned}&g_1^s : E_1 \to E_{\mu_1(T)}(\Delta_{g_T}^{2s+q+1}) \cap Imd \text{ définie pour } s \geq 1 \text{ par :}\\ &g_1^s := (r-q)d\Big[(0, (Jd_HJ)L^{s-1}G^{\Delta_H}\Big].\end{aligned}$$

Lorsque $u \in E_1$ nous avons $g_2^s(u) \in \mathcal{R}_{2s+q+1}^s$ et

$$\Pi^2(g_1^s(u)) = (-1)^{q+1}u.$$

Démonstration :
(i) Soit $u \in E_1$. Posons $v_1 = G^{\Delta_H}u$ et $v_2 := d_H v_1$. Remarquons que v_1, v_2 sont primitives et que $\Delta_H v_1 = u$ car $u \in \mathcal{H}^\perp$. Un calcul semblable à celui fait au lemme 3.3.2.1 pour l'application g_3^s nous conduit à

$$\begin{aligned}&(\Delta_{g_T} - \lambda_1(T))f_1^s(u) =\\ &= \tfrac{r-q}{r-q-s-1}\begin{pmatrix} (d_H^\star L^{s+1})Q(\Delta_H^T)v_2 + (-1)^{q+1}\mathcal{L}_R(Jd_H^\star J)L^{s+1}v_2\\ T^2(-1)^{q+1}(s+1)(r-q-s-1)Q(\Delta_H^T)L^s v_2 + T^2(d_H^\star J)^2 L^{s+1}v_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nous avons

3.3.3.3 $$Q(\Delta_H^T)v_2 = Q(\Delta_H^T)d_H v_1 = (-1)^q\mathcal{L}_R(Jd_HJ)v_1$$

car $v_1 \in Ker\ Q(\Delta_H^T)$. Il vient alors par (2.2.17) que

$$\begin{aligned}&(d_H^\star L^{s+1})Q(\Delta_H)v_2 = (-1)^q\mathcal{L}_R(d_H^\star L^{s+1})(Jd_HJ)v_1 =\\ &= (-1)^q\mathcal{L}_R(L^{s+1}d_H^\star(Jd_HJ)v_1 + (-1)^q(s+1)L^s(Jd_HJ)^2v_1).\end{aligned}$$

Or $d_H^\star(Jd_HJ)v_1 = (-1)^{q+1}(r-q)\mathcal{L}_R v_1$ (par (2.2.18) car $v_1 \in \mathcal{P}^q$) et $(Jd_HJ)^2v_1 = \mathcal{L}_R L v_1$. Par conséquent on arrive à

3.3.3.4 $$(d_H^\star L^{s+1})Q(\Delta_H)v_2 = (s+1-r+q)\mathcal{L}_R^2 L^{s+1}v_1.$$

Ensuite, toujours par (2.2.17) nous avons

$$(Jd_H^\star J)L^{s+1}v_2 = J(d_H^\star L^{s+1})Jv_2 = J(L^{s+1}d_H^\star + (-1)^q(s+1)(Jd_HJ)L^s)Jv_2 =$$
$$= L^{s+1}((Jd_H^\star J)d_Hv_1) + (-1)^q(s+1)\mathcal{L}_RL^{s+1}v_1.$$

En utilisant (2.2.18) nous obtenons que

$$(Jd_H^\star J)d_Hv_1 = (-1)^{q+1}(r-q)\mathcal{L}_Rv_1$$

ce qui entraine

3.3.3.5 $$(Jd_H^\star J)L^{s+1}v_2 = (-1)^q(s+1-r+q)\mathcal{L}_RL^{s+1}v_1.$$

On conclut par (3.3.3.3) et (3.3.3.4) que

$$(d_H^\star L^{s+1})Q(\Delta_H^T)v_2 + (-1)^{q+1}\mathcal{L}_R(Jd_H^\star J)L^{s+1}v_2 = 0.$$

Il nous reste à calculer $(d_H^\star J)^2L^{s+1}v_2$. En utilisant (3.3.3.5) nous avons

$$(d_H^\star J)^2L^{s+1}v_2 = (-1)^q(s+1-r+q)\mathcal{L}_R(d_H^\star L^{s+1})v_1 =$$
$$= -(s+1)(s+1-r+q)\mathcal{L}_RL^s(Jd_HJ)v_1$$

par (2.2.17) et le fait que $v_1 \in \mathcal{P}^q$. Ceci et l'identité (3.3.3.5) nous conduisent à

$$T^2(-1)^{q+1}(s+1)(r-q-s-1)Q(\Delta_H^T)L^sv_2 + T^2(d_H^\star J)^2L^{s+1}v_2 = 0$$

On a bien montré que $f_1^s(u) \in E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2+2s})$. Nous étudions maintenant la décomposition de Lefschetz de $f_1^s(u)$. On a

$$f_1^s(u) = \tfrac{r-q}{r-q-s-1}d_{g_T}^\star L^{s+1}v_2 = \begin{pmatrix} d_H^\star & \frac{(-1)^{q+1}}{T^2}\mathcal{L}_R \\ (-1)^{q+1}T^2L^\star & d_H^\star \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L^{s+1}v_2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \tfrac{r-q}{r-q-s-1}\begin{pmatrix} (d_H^\star L^{s+1})v_2 \\ (-1)^{q+1}T^2(s+1)(r-q-1-s)L^sv_2 \end{pmatrix}.$$

Or, de nouveau par (2.2.17) on a

$$(d_H^\star L^{s+1})v_2 = (d_H^\star L^{s+1})d_Hv_1 = L^{s+1}(d_H^\star d_Hv_1) + (-1)^q(s+1)L^s(Jd_H)^2v_1 =$$
$$= L^{s+1}u + (-1)^q(s+1)L^s(Jd_H)^2v_1.$$

Comme

3.3.3.6 $$[(d_HJ)^2, L^\star] = (-1)^{q+1}d_Hd_H^\star + J(d_H^\star d_H)J \text{ sur } \Lambda^q(H)$$

(voir la preuve de (2.2.28)) il vient par le fait que $v_1 \in \mathcal{P}^q$ que

$$L^\star(d_HJ)^2v_1 = (-1)^{q+1}\Delta_Hv_1 = (-1)^{q+1}u.$$

Par conséquent, la forme

$$(r-q)(d_HJ)^2v_1 + (-1)^qLu$$

est primitive, ce qui fait que la décomposition de Lefschetz de $f_1^s(u)$ est

3.3.3.7
$$f_1^s(u) = \frac{(-1)^q(s+1)}{r-q-s-1} L^s \Big[(r-q)(Jd_H)^2 v_1 + (-1)^q Lu\Big] + L^{s+1}u + (-1)^{q+1}(r-q)(s+1)L^s v_2 \wedge \theta.$$

(ii) Cette fois, pour $u \in E_1$ nous allons poser $u_1 := G^{\Delta_H} u$ et $u_2 := (Jd_H J)u_1$. Notons que u_1, u_2 sont primitives et que $\Delta_H u_1 = u$ car nous avons $u \in \mathcal{H}^\perp$. Un calcul analogue à celui qu'on a fait au lemme 3.3.2.1 pour l'appplication f_3^s nous donne :

$$(\Delta_{g_T} - \mu_1(T))g_1^s(u) = (r-q)\begin{pmatrix} -L^{s-1}(d_H J)^2 u_2 + (-1)^{q-1} L^s Q(\Delta_H^T) u_2 \\ L^{s-1}\Big[d_H Q(\Delta_H^T) u_2 + (-1)^{q+1}\mathcal{L}_R (Jd_H J) u_2\Big] \end{pmatrix}.$$

On s'assure sans peine que

$$(d_H J)^2 u_2 = \mathcal{L}_R L d_H u_1, (Jd_H J)u_2 = \mathcal{L}_R L u_1$$

et que

$$Q(\Delta_H^T) u_2 = (-1)^{q+1}\mathcal{L}_R d_H u_1$$

(car $Q(\Delta_H^T)u_1 = 0$). Il vient facilement que

$$(\Delta_{g_T} - \mu_1(T))g_1^s(u) = 0.$$

Occupons-nous de la décomposition de Lefschetz de $g_1^s(u)$. On a

$$g_1^s(u) = (r-q)d\begin{pmatrix} 0 \\ L^{s-1}u_2 \end{pmatrix} = (r-q)\begin{pmatrix} d_H & (-1)^{q-1}L \\ (-1)^q \mathcal{L}_R & d_H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ L^{s-1}u_2 \end{pmatrix} =$$
$$= (-1)^{q-1}(r-q)L^s u_2 + (r-q)L^{s-1} d_H u_2 \wedge \theta.$$

Nous avons $d_H u_2 = (Jd_H)^2 u_1$. Par (3.3.3.6) et le fait que $u_1 \in \mathcal{P}^q$ on obtient

$$L^\star d_H u_2 = L^\star (d_H J)^2 u_1 = (-1)^{q+1}\Delta_H u_1 = (-1)^{q+1} u.$$

Par conséquent, la forme

$$(r-q)d_H u_2 + (-1)^q Lu$$

est primitive, ce qui fait que la décomposition de Lefschetz de $g_1^s(u)$ est

3.3.3.8
$$g_1^s(u) = (-1)^{q-1}(r-q)L^s u_2 + L^{s-1}\Big[(r-q)d_H u_2 + (-1)^q Lu\Big] \wedge \theta + +(-1)^{q+1} L^s u \wedge \theta.$$

■

3.3.4 Réalisation de l'espace E_2

Comme nous l'avons fait pour les espaces I_1 et E_1 nous voulons maintenant réaliser l'espace E_2 comme un espace de formes propres pour le laplacien Δ_{g_T}. Pour ce faire il nous faut un résultat préparatif.

Lemme 3.3.4.1
Soit $w \in \mathbb{R}[X], w := P - T^2(r-q)$. L'opérateur

$$B := (r-q)w(\Delta_H^T) - \Delta_H : E_2 \to E_2$$

est bijectif.

Démonstration :
Il est clair que B est bien définit. Comme E_2 est de dimension finie, il suffit de montrer que B est injectif. Soit $\zeta \in E_2$ telle que $B\zeta = 0$. Il vient alors que

$$w(\Delta_H^T)\zeta = \frac{1}{r-q}\Delta_H\zeta.$$

En utilisant ceci dans $R(\Delta_H^T)\zeta = 0$ (voir 3.2.2.7) il vient après calcul

$$\Delta_{\overline{\partial_H}}\Delta_{\partial_H}\zeta = 0$$

ce qui entraine $\zeta = 0$ car $\zeta \in \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp$ ■

Nous allons utiliser la notation

$$G^B := B^{-1} : E_2 \to E_2$$

pour l'inverse algébrique de B. Nous sommes en position de démontrer le résultat suivant.

Lemme 3.3.4.2
Soit $s \geq 0$ fixé. Nous avons des applications linéaires :
(i)

3.3.4.1

$$f_2^s : E_2 \to E_{\lambda_3(T)}(\Delta_{g_T}^{2s+q+2}) \cap Im\ d \text{ définie par } :$$
$$f_2^s := (r-q)d((Jd_HJ)L^s, w(\Delta_H^T)L^s)G^B$$

Si $u \in E_2$ on a

$$f_2^s(u) \in \mathcal{T}_{2s+q+2}^s \text{ et } \Pi^1(f_2^s(u)) = (-1)^q u.$$

(ii)

3.3.4.2

$$g_2^s : E_2 \to E_{\lambda_3(T)}(\Delta_{g_T}^{2s+1+q}) \cap Im\ d_{g_T}^\star \text{ définie pour } r-q-s \neq 0 \text{ par}$$
$$g_2^s := \frac{-(r-q)}{r-q-s} d_{g_T}^\star\left(\frac{(-1)^{q+1}}{T^2(s+1)} L^{s+1} w(\Delta_H^T), L^s d_H\right) G^B$$

Pour $u \in E_2$ nous avons

$$g_2^s(u) \in \mathcal{R}_{2s+q+1}^s \text{ et } \Pi^2(g_2^s(u)) = u.$$

Démonstration :
(i) Soit $u \in E_2$. Posons $u_1 = G^B u$ et $u_2 = (Jd_HJ)u_1$. Notons que $u_1 \in E_2$ et que u_2 est primitive, $Bu_1 = u$. On calcule maintenant

$$\Delta_{g_T}\begin{pmatrix} L^s u_2 \\ L^s w(\Delta_H^T)u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_H^T + T^2 LL^\star & -Jd_HJ \\ T^2 Jd_H^\star J & \Delta_H^T + T^2 L^\star L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L^s u_2 \\ L^s w(\Delta_H^T)u_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\Delta_H^T + T^2 LL^\star)L^s u_2 - (Jd_HJ)L^s w(\Delta_H^T)u_1 \\ T^2(Jd_H^\star J)L^s u_2 + (\Delta_H^T + T^2 L^\star L)L^s w(\Delta_H^T)u_1 \end{pmatrix}.$$

Or, par (2.2.6) nous avons

$$L^\star L^s u_2 = s(r-q-s)L^{s-1}u_2,\ L^\star L^{s+1}u_1 = (s+1)(r-q-s)L^s u_1.$$

Ceci entraine que

$$\begin{aligned}&(\Delta_H^T + T^2 L^\star L)L^s w(\Delta_H^T)u_1 = L^s(Pw)(\Delta_H^T)u_1 + \lambda_3(T)L^s w(\Delta_H^T)u_1 = \\ &= T^2 L^s \Delta_H^T u_1 + \lambda_3(T)L^s w(\Delta_H^T)u_1\end{aligned}$$

car $u_1 \in Ker\ R(\Delta_H^T)$ (rappelons que $R = Pw - T^2 X$). On a aussi

$$\begin{aligned}&(Jd_H J)w(\Delta_H^T)u_1 = w(\Delta_H^T)(Jd_H J)u_1 - J[\Delta_H, d_H]Ju_1 = \\ &= w(\Delta_H^T)u_2 + (-1)^q \mathcal{L}_R d_H u_1.\end{aligned}$$

Par ces faits il vient que

$$(\Delta_{g_T} - \lambda_3(T))\begin{pmatrix} L^s u_2 \\ L^s w(\Delta_H^T)u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^2 s L^s u_2 + (-1)^{q+1}\mathcal{L}_R L^s d_H u_1 \\ T^2 (Jd_H^\star J)L^s u_2 + T^2 L^s \Delta_H^T u_1 \end{pmatrix}.$$

Il nous reste donc à calculer $(Jd_H^\star J)L^s u_2$. Nous avons par (2.2.17) :

$$\begin{aligned}&(Jd_H^\star J)L^s u_2 = (-1)^{q+1} J(d_H^\star L^s)(d_H J u_1) = \\ &= (-1)^{q+1} J(L^s d_H^\star + (-1)^q s L^{s-1}(Jd_H J))d_H J u_1 = \\ &= -L^s(\Delta_H u_1) + (-1)^{q+1} s L^{s-1}(d_H J)^2 u_1.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$(\Delta_{g_T} - \lambda_3(T))\begin{pmatrix} L^s u_2 \\ L^s w(\Delta_H^T)u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^2 s L^s u_2 + (-1)^{q+1}\mathcal{L}_R L^s(d_H u_1) \\ -\mathcal{L}_R^2 L^s u_1 + (-1)^{q+1} T^2 s L^{s-1}(d_H J)^2 u_1 \end{pmatrix}.$$

A partir de cette dernière relation, par application de d, un calcul facile montre que

$$(\Delta_{g_T} - \lambda_3(T))f_2^s(u) = 0.$$

Etudions maintenant la décomposition de Lefschetz de $f_2^s(u)$. On a :

$$\begin{aligned}&f_2^s(u) = (r-q)d\begin{pmatrix} L^s u_2 \\ L^s w(\Delta_H^T)u_1 \end{pmatrix} = \\ &= (r-q)\begin{pmatrix} d_H & (-1)^q L \\ (-1)^{q+1}\mathcal{L}_R & d_H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L^s u_2 \\ \\ L^s w(\Delta_H^T)u_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} L^s\Big[(r-q)(d_H J)^2 u_1 + (-1)^q L\Delta_H u_1\Big] + (-1)^q L^{s+1}B(u_1) \\ (r-q)L^s d_H w(\Delta_H^T)u_1 + (-1)^{q+1}(r-q)L^s\mathcal{L}_R(Jd_H J)u_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Comme la forme

$$(r-q)(d_H J)^2 u_1 + (-1)^q L\Delta_H u_1$$

est primitive, il est immédiat de voir que la décomposition de Lefschetz de $f_2^s(u)$ est :

3.3.4.3

$$f_2^s(u) = L^s\Big[(r-q)(d_HJ)^2u_1 + (-1)^qL\Delta_Hu_1\Big] + (-1)^qL^{s+1}u+$$
$$+\Big[(r-q)L^sd_Hw(\Delta_H^T)u_1 + (-1)^{q+1}(r-q)L^s\mathcal{L}_R(Jd_HJ)u_1\Big]\wedge\theta.$$

(ii) Soit $u \in E_2$. Posons $v_1 = G^Bu$ et $v_2 = d_Hv_1$. Il s'agit visiblement de formes primitives. Par construction on a $Bv_1 = u$. En utilisant (2.2.6) nous obtenons

$$\Delta_{g_T}\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{q+1}}{T^2(s+1)}L^{s+1}w(\Delta_H^T)v_1 \\ L^sv_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \Delta_H^T + T^2LL^\star & -Jd_HJ \\ T^2Jd_H^\star J & \Delta_H^T + T^2L^\star L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{q+1}}{T^2(s+1)}L^{s+1}w(\Delta_H^T)v_1 \\ L^sv_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{q+1}}{T^2(s+1)}(\Delta_H^T + T^2(s+1)(r-q-s))L^{s+1}w(\Delta_H^T)v_1 - L^s(Jd_H)^2v_1 \\ \frac{(-1)^{q+1}}{s+1}(Jd_H^\star J)L^{s+1}w(\Delta_H^T)v_1 + (\Delta_H^T + T^2(s+1)(r-q-s-1))L^sv_2 \end{pmatrix}.$$

Par (2.2.17) et le fait que $v_1 \in \mathcal{P}^q$ implique $w(\Delta_H^T)v_1 \in \mathcal{P}^q$ nous avons

$$(Jd_H^\star J)L^{s+1}w(\Delta_H^T)(v_1) = (-1)^q(s+1)L^sd_Hw(\Delta_H^T)v_1 =$$
$$= (-1)^q(s+1)L^sw(\Delta_H^T)v_2 - (s+1)L^s\mathcal{L}_R(Jd_HJ)v_1.$$

Comme $R = Pw - T^2X$ et $v_1 \in Ker\ R(\Delta_H^T)$ nous avons

$$(\Delta_H^T + T^2(s+1)(r-q-s))w(\Delta_H^T)v_1 = \lambda_3(T)w(\Delta_H^T)v_1 + (Pw)(\Delta_H^T)v_1 =$$
$$= \lambda_3(T)w(\Delta_H^T)v_1 + T^2\Delta_H^Tv_1.$$

Tous ces faits nous conduisent à

$$(\Delta_{g_T} - \lambda_3(T))\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{q+1}}{T^2(s+1)}L^{s+1}w(\Delta_H^T)v_1 \\ L^sv_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{q+1}}{s+1}L^{s+1}\Delta_H^Tv_1 - L^s(Jd_H)^2v_1 \\ T^2(r-q-s-1)L^sv_2 + (-1)^qL^s\mathcal{L}_R(Jd_HJ)v_1 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{q+1}}{s+1}d_{g_T}^\star\begin{pmatrix} L^{s+1}v_2 \\ (-1)^qL^{s+1}(\mathcal{L}_Rv_1) \end{pmatrix}.$$

Par application de $d_{g_T}^\star$ on trouve

$$(\Delta_{g_T} - \lambda_3(T))g_2^s(u) = 0.$$

Etudions la décomposition de Lefschetz de $g_2^s(u)$. Par la définition de notre application il vient

$$g_2^s(u) = \frac{-(r-q)}{r-q-s}\begin{pmatrix} d_H^\star & \frac{(-1)^q}{T^2} \\ (-1)^qT^2L^\star & d_H^\star \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{q+1}}{T^2(s+1)}L^{s+1}w(\Delta_H^T)v_1 \\ L^sv_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{-(r-q)}{r-q-s}\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{q+1}}{T^2(s+1)}(d_H^\star L^{s+1})w(\Delta_H^T)v_1 + \frac{(-1)^q}{T^2}\mathcal{L}_RL^sv_2 \\ -\frac{1}{s+1}L^\star L^{s+1}w(\Delta_H^T)v_1 + (d_H^\star L^s)v_2 \end{pmatrix}.$$

Mais

$$(d_H^\star L^{s+1})w(\Delta_H^T)v_1 = (-1)^{q+1}(s+1)L^s(Jd_HJ)w(\Delta_H^T)v_1$$

par $(2.2.17)$ et le fait que $w(\Delta_H^T)v_1 \in \mathcal{P}^q$. Nous avons également que (par (2.2.17) et (2.2.6))

$$L^\star L^{s+1}v_1 = (s+1)(r-q-s)L^s v_1$$

et

$$(d_H^\star L^s)v_2 = L^s\Delta_H v_1 + (-1)^q s L^{s-1}(d_HJ)^2 v_1.$$

On en tire

$$g_2^s(u) = \frac{-1}{r-q-s}\begin{pmatrix} \frac{r-q}{T^2}L^s(Jd_HJ)w(\Delta_H^T)v_1 + \frac{(-1)^q(r-q)}{T^2}L^s(\mathcal{L}_R d_H v_1) \\ (-1)^q s L^{s-1}\Big[(r-q)(d_HJ)^2v_1 + (-1)^q L\Delta_H v_1\Big] - (r-q-s)L^s B v_1 \end{pmatrix}.$$

Comme les formes $(Jd_HJ)w(\Delta_H^T)v_1, \mathcal{L}_R d_H v_1, (r-q)(d_HJ)^2v_1 + (-1)^q L\Delta_H v_1$ sont primitives et $Bv_1 = u$ nous pouvons conclure ■

Chapitre 4

Spectre du laplacien sur les formes de (M, g_T)

Sommaire

4.1 Introduction et définitions **59**
4.2 Le principe de séparation des variables dans le spectre des formes de (M, g_T) **61**
4.3 Démonstration du Théorème 4.2.1 . . . . . **68**
4.3.1 La stratégie 68
4.3.2 L'espace $E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{T}_{2p+2}^s$ 70
4.3.3 L'espace $E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{R}_{2p+2}^s$ 78
4.3.4 La démonstration du théorème 4.2.1 82

4.1 Introduction et définitions

Dans tout ce chapitre on va travailler dans la situation géométrique considérée à la section 2.2. Notre objectif est d'essayer de séparer les composantes horizontales et verticales dans le spectre de Δ_{g_T} tout en essayant de déterminer le comportement en T de ce spectre. Dans le cas d'un fibré, cela revient à voir comment on peut relier le spectre de la base (ou plutôt d'un opérateur défini sur la base) et le spectre de la fibre au spectre de l'espace total.

Pour la valeur propre 0 nous savons, dans le cas d'une fibration (par le théorème de Leray-Hirsch), que l'espace propre associé se sépare en composantes horizontales et verticales qui correspondent, grosso-modo, à la cohomologie de la base et à celle de la fibre. Pour un fibré en cercles la même réponse peut être déduite de la suite de Gysin.

Toutefois, l'intuition que peut nous procurer l'étude de la cohomologie de de Rham dans la résolution de notre problème est bien limitée ; une raison est que les formes harmoniques de (M, g_T) sont dans le noyau de $\mathcal{L}_R$. Cependant, nous allons voir que l'on peut récupérer certaines valeurs propres de Δ_{g_T} à l'aide de ces espaces de cohomologie.

De façon heuristique, notre motivation est la suivante. Nous savons (cf. (2.2.1)) que l'espace des formes de M est déterminé par les formes horizontales. On réduit alors l'étude du spectre de Δ_{g_T} à l'étude du spectre d'un opérateur horizontal ; par la formule (2.2.19), Δ_H^T semble être l'opérateur adéquat. Notons que le spectre de Δ_{g_T} ne sera pas égal (sauf dans le cas des

fonctions) à celui de Δ_H^T ; ce dernier va effectivement déterminer le spectre de Δ_{g_T} mais par l'intermédiaire de fonctions algébriques qui dépendent de T et du spectre de Δ_H^T. La géométrie de notre variété M (qui est d'ailleurs produite par la géométrie de N) joue également un rôle dans cette théorie, par l'intermédiaire des groupes de cohomologie de Dolbeault qui produiront du spectre pour Δ_{g_T}.

Cette démarche peut être comparée avec ce qu'on fait classiquement dans l'analyse harmonique des groupes de Lie compacts : sous certaines hypothèses, on réduit l'étude d'un laplacien à un opérateur de Casimir via la théorie des représentations. Dans notre cas, l'opérateur qui détermine le spectre de Δ_{g_T} est $\Delta_H^T = \Delta_H - \frac{1}{T^2}\mathcal{L}_R^2$. L'opérateur $-\mathcal{L}_R^2$ est un opérateur de Casimir.

Introduisons quelques objets qui serviront à énoncer le théorème principal de ce chapitre. Soient $0 \leq p \leq r-1$, $0 \leq s \leq p$ naturels et $T \in \mathbb{R}_+^\star$. Définissons les polynômes $h_{1,p}^s$, $h_{2,p}^s$, $h_{3,p}^s$, $h_{4,p}^s$, P_p^s, $R_p^s \in \mathbb{R}[X, Y]$ par

$$\begin{aligned}
&h_{1,p}^s := X + T^2(s+1)(c_p + s) - Y \ , h_{2,p}^s := h_{1,p}^s + T^2(s+1) \\
&h_{3,p}^s := h_{1,p}^s - T^2(c_p + s),\ h_{4,p}^s := h_{3,p}^s - T^2 s \\
&P_p^s := h_{2,p}^s \cdot h_{3,p}^s - T^2 X,\ R_p^s := h_{1,p}^s \cdot h_{4,p}^s - T^2 X
\end{aligned}$$

où, par définition, $c_p = r - 2p - 1$. Lorsque $\lambda \in \mathbb{R}_+$ introduisons une famille d'espaces vectoriels définis par

$$\begin{aligned}
E_{1,p}^s(\lambda) &= \{\alpha \in \mathcal{P}^{2(p-s)} \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp : P_p^s(\Delta_H^T, \lambda)\alpha = 0\} \\
E_{2,p}^s(\lambda) &= \{\alpha \in \mathcal{P}^{2(p-s)} \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp : h_{1,p}^s(\Delta_H^T, \lambda)\alpha = 0\} \\
F_{1,p}^s(\lambda) &= \{\beta \in \mathcal{P}^{2(p-s)+1} \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp : R_p^s(\Delta_H^T, \lambda)\beta = 0\} \\
F_{2,p}^s(\lambda) &= \{\beta \in \mathcal{P}^{2(p-s)+1} \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp : h_{3,p}^s(\Delta_H^T, \lambda)\beta = 0\} \\
\mathfrak{e}_{1,p}^s(\lambda) &= \left[\mathcal{H}_1^{2(p-s)} + \mathcal{H}_2^{2(p-s)}\right] \cap \mathcal{H}^\perp \cap Ker\ h_{1,p}^s(\Delta_H^T, \lambda) \\
\mathfrak{e}_{2,p}^s(\lambda) &= \mathcal{H}_1^{2(p-s)} \cap Ker\ \left[h_{2,p}^s(\Delta_H^T, \lambda) - i\mathcal{L}_R\right] \\
\mathfrak{e}_{3,p}^s(\lambda) &= \mathcal{H}_2^{2(p-s)} \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap Ker\ \left[h_{2,p}^s(\Delta_H^T) + i\mathcal{L}_R\right] \\
\mathfrak{f}_{1,p}^s(\lambda) &= \left[\mathcal{H}_1^{2(p-s)+1} + \mathcal{H}_2^{2(p-s)+1}\right] \cap \mathcal{H}^\perp \cap Ker\ h_{3,p}^s(\Delta_H^T, \lambda) \\
\mathfrak{f}_{2,p}^s(\lambda) &= \mathcal{H}_1^{2(p-s)+1} \cap Ker\ \left[h_{1,p}^s(\Delta_H^T, \lambda) - i\mathcal{L}_R\right] \\
\mathfrak{f}_{3,p}^s(\lambda) &= \mathcal{H}_2^{2(p-s)+1} \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap Ker\ \left[h_{1,p}^s(\Delta_H^T) + i\mathcal{L}_R\right].
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Nous allons également définir (dans un souci de concision) les espaces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_p^s(\lambda) &:= \mathfrak{e}_{2,p}^s(\lambda) \oplus \mathfrak{e}_{3,p}^s(\lambda) \oplus \mathfrak{f}_{1,p}^s(\lambda) \\
\mathfrak{F}_p^s(\lambda) &:= \mathfrak{e}_{1,p}^s(\lambda) \oplus \mathfrak{f}_{2,p}^s(\lambda) \oplus \mathfrak{f}_{3,p}^s(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Pour $0 \leq q \leq r$, définissons aussi

4.1.3 $$F^q_\lambda(T) := Ker(\Delta^T_H - \lambda) \cap \mathcal{P}^q.$$

Remarque 4.1.1
Les espaces définis en (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3) sont préservés par l'action du cercle.

4.2 Le principe de séparation des variables dans le spectre des formes de (M, g_T)

On dispose de tous les élements nécessaires pour énoncer nos résultats. Nous avons alors le théorème suivant, qui détermine à isomorphisme près l'espace propre de Δ_{g_T} en fonction des espaces définis ci-dessus.

Si V est un espace vectoriel, nous allons noter V^2 le produit cartésien $V \times V$.

Théorème 4.2.1 *(PSV pour les espaces propres des formes de (M, g_T))*
(i) Si $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ alors

4.2.1 $$\begin{aligned} E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) &\cong F^{2p+2}_\lambda(T) \oplus \Big[E^0_{1,p}(\lambda) \oplus F^0_{2,p}(\lambda)\Big] \oplus \\ &\oplus \Big(\bigoplus_{s=1}^p E^s_{1,p}(\lambda) \oplus \Big[F^s_{2,p}(\lambda)\Big]^2\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{s=0}^p F^s_{1,p}(\lambda) \oplus \Big[E^s_{2,p}(\lambda)\Big]^2\Big) \oplus (\bigoplus_{s=0}^p \mathfrak{E}^s_p(\lambda) \oplus \mathfrak{F}^s_p(\lambda)). \end{aligned}$$

La partie fermée de $E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})$ est isomorphe à

4.2.2 $$\Big[E^0_{1,p}(\lambda) \oplus F^0_{2,p}(\lambda)\Big] \oplus \Big(\bigoplus_{s=1}^p E^s_{1,p}(\lambda) \oplus \Big[F^s_{2,p}(\lambda)\Big]^2\Big) \oplus \bigoplus_{s=0}^p \mathfrak{E}^s_p(\lambda).$$

La partie cofermée (pour la métrique g_T) de $E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})$ est isomorphe à

4.2.3 $$F^{2p+2}_\lambda(T) \oplus \Big(\bigoplus_{s=0}^p F^s_{1,p}(\lambda) \oplus \Big[E^s_{2,p}(\lambda)\Big]^2\Big) \oplus \bigoplus_{s=0}^p \mathfrak{F}^s_p(\lambda).$$

(ii) Si $r - 1 \geq p \geq [\frac{r}{2}]$ la décomposition est

4.2.4 $$\begin{aligned} E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) &\cong F^{2(r-p)-1}_\lambda(T) \oplus E^{2p+1-r}_{1,p}(\lambda) \oplus E^{2p+1-r}_{2,p}(\lambda) \oplus \\ &\oplus \Big(\bigoplus_{s=2p+2-r}^p E^s_{1,p}(\lambda) \oplus \Big[F^s_{2,p}(\lambda)\Big]^2\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{s=2p+2-r}^p F^s_{1,p}(\lambda) \oplus \Big[E^s_{2,p}(\lambda)\Big]^2\Big) \oplus \\ &\oplus \Big(\mathfrak{e}^{2p+1-r}_{1,p}(\lambda) \oplus \mathfrak{e}^{2p+1-r}_{2,p}(\lambda) \oplus \mathfrak{e}^{2p+1-r}_{3,p}(\lambda)\Big) \oplus \bigoplus_{s=2p+2-r}^p \mathfrak{E}^s_p(\lambda) \oplus \bigoplus_{s=2p+2-r}^p \mathfrak{F}^s_p(\lambda). \end{aligned}$$

La partie fermée de cette décomposition est donnée par

4.2.5 $$\begin{aligned} &F^{2(r-p)-1}_\lambda(T) \oplus E^{2p+1-r}_{1,p}(\lambda) \oplus \Big(\bigoplus_{s=2p+2-r}^p E^s_{1,p}(\lambda) \oplus \Big[F^s_{2,p}(\lambda)\Big]^2\Big) \oplus \\ &\oplus \mathfrak{e}^{2p+1-r}_{2,p}(\lambda) \oplus \mathfrak{e}^{2p+1-r}_{3,p}(\lambda) \oplus \bigoplus_{s=2p+2-r}^p \mathfrak{E}^s_p(\lambda). \end{aligned}$$

La partie cofermée (par rapport à g_T) de $E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})$ est isomorphe à

4.2.6 $$E_{2,p}^{2p+1-r}(\lambda) \oplus \Big(\bigoplus_{s=2p+2-r}^{p} F_{1,p}^{s}(\lambda) \oplus \Big[E_{2,p}^{s}(\lambda)\Big]^2 \Big) \oplus \mathfrak{e}_{1,p}^{2p+1-r}(\lambda) \oplus \bigoplus_{s=2p+2-r}^{p} \mathfrak{F}_p^s(\lambda).$$

La démonstration de ce résultat sera donnée dans la section 4.3. Il est possible de donner un théorème analogue au théorème 4.2.1 dans un cadre équivariant. Nous devons seulement noter que les espaces et les isomorphismes qui y interviennent sont préservés par l'action du cercle (voir la section 4.3).

Dans le reste de cette section le théorème précédent sera admis et nous allons en discuter quelques conséquences immédiates.

Par dualité de Hodge, le théorème 4.2.1 nous donne la structure de l'espace propre $E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+1})$, $0 \leq p \leq r$. La formulation de ceci sera laissée au lecteur. Signalons que pour $p = r$ on retrouve le cas des fonctions. Néanmoins, le résultat concernant les 1-formes sera énoncé plus bas.

Le théorème 4.2.1 nous dit essentiellement que l'espace propre des p-formes de (M, g_T) s'exprime en fonction des espaces plus simples, dans le sens qu'il s'agit des espaces constitués de formes horizontales. L'apparition de polynômes dans la définition de ces espaces est due à la géométrie de notre fibré (à comparer avec le cas d'un fibré trivial).

Afin de mieux comprendre l'énoncé de notre théorème examinons le cas le plus simple, celui des 1-formes.

Corollaire 4.2.1
Nous avons un isomorphisme

4.2.7 $$E_\lambda(\Delta_{g_T}^1) \cong F_\lambda^1(T) \oplus \Big[F_\lambda^0(T) \cap \mathcal{H}^\perp\Big] \oplus E_{1,0}^0(\lambda).$$

La partie exacte de $E_\lambda(\Delta_{g_T}^1)$ est isomorphe à

4.2.8 $$F_\lambda^0(T) \cap \mathcal{H}^\perp.$$

La partie cofermée (pour la métrique g_T) de $E_\lambda(\Delta_{g_T}^1)$ est isomorphe à

4.2.9 $$F_\lambda^1(T) \oplus E_{1,0}^0(\lambda).$$

Démonstration :
Par dualité de Hodge, les laplaciens $\Delta_{g_T}^1$ et $\Delta_{g_T}^{2r}$ sont isospectraux. On applique le théorème 4.2.1 pour $p = r - 1$ ■

Pour visualiser encore mieux le théorème 4.2.1 dans le cas des 1-formes notons que $F_\lambda^0(T)$ est l'espace propre du laplacien Δ_{g_T} sur les fonctions (car $\Delta_{g_T} = \Delta_H^T$ sur $\Lambda^0(M)$) et $E_{1,0}^0(\lambda)$ est l'espace des fonctions $f \in C^\infty(M) \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp$ qui vérifient :

$$(\Delta_H^T - \lambda)(\Delta_H^T + T^2 r - \lambda) f - T^2 \Delta_H^T f = 0.$$

Une version plus intuitive du PSV pour les espaces propres de (M, g_T), le cas des 1-formes, s'obtient lorsque notre variété M est de dimension 3, i.e. $r = 1$ .Dans ce cas, par dualité de Hodge, on s'intéresse uniquement au cas des 1-formes. Nous avons :

Corollaire 4.2.2
Supposons que $r = 1$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Nous avons un isomorphisme

4.2.10 $$E_\lambda(\Delta^1_{g_T}) \cong \left[Ker(\tfrac{1}{T^2}\mathcal{L}^2_R + \lambda) \cap \mathcal{H}^1\right] \oplus \left[F^0_\lambda(T) \cap \mathcal{H}^\perp\right] \oplus E^0_{1,0}(\lambda)$$

Démonstration :
Par (4.2.7) il suffit d'examiner l'espace $F^1_\lambda(T)$. Or, $\mathcal{P}^1 = \mathcal{H}^1$ par (2.3.6) et le fait que $r = 1$ ■

On peut faire une analogie avec le spectre des 1-formes d'une surface de Riemann qui est déterminé, à cause de la dualité de Hodge, par le spectre des fonctions et les formes harmoniques comme le démontre le résultat suivant.

Théorème 4.2.2
Lorsque $r = 1$, le spectre des fonctions de (M, g_T) et la cohomologie de Dolbeault de M déterminent le spectre des 1-formes de (M, g_T).

Démonstration :
Il faut juste remarquer que, dans l'isomorphisme (4.2.10), les espaces $F^0_\lambda(T)$ et $E^0_{1,0}(\lambda)$ sont constitués de fonctions ■

Remarque 4.2.1
L'isomorphisme (4.2.10) est d'autre nature que la dualité de Hodge.

On continue avec les observations concernant notre théorème, tout en revenant au cas général (r arbitraire).

Remarque 4.2.2
Nous avons une légère différence de structure entre le spectre des $2p+2$-formes avec $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ et le spectre des $2p+2$-formes avec $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$. Ceci est du, comme on le verra dans la section 4.3, au fait que le début de la décomposition de Lefschetz de $\Lambda^{2p+2}(H)$ est de nature différente dans les deux cas (cf.(2.2.8)).

Remarque 4.2.3
Par le théorème (4.2.1) les espaces propres du laplacien sont déterminés par les espaces propres du laplacien Δ^T_H en restriction aux espaces $\mathcal{P}^q, 0 \leq q \leq r$. Nous avons donc une analogie avec le cas d'une variété kählerienne où nous savons que le spectre des formes primitives de degré inférieur où égal à la moitié détermine la totalité du spectre (voir la section 2.4).

Une autre conséquence du théorème 4.2.1 c'est qu'il nous permet de décrire les formes harmoniques de (M, g_T) comme suit (ce résultat figurait déjà dans [45]).

Corollaire 4.2.3
Nous avons :
(i) Si $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$

4.2.11 $$Harm^{2p+2}(M, g_T) = \mathcal{H}^{2p+2}_1.$$

(ii) Si $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$ un isomorphisme

4.2.12 $$Harm^{2p+2}(M, g_T) \cong \mathcal{H}^{2(r-p)-1}_1.$$

Démonstration :
(i) On va se servir de (4.2.1). Examinons les espaces qui y apparaissent lorsque $\lambda = 0$.
L'opérateur $h^s_{1,p}(\Delta^T_H, 0)$ étant strictement positif pour $0 \leq s \leq p$ nous avons que

$$E^s_{2,p}(0) = 0 \text{ et } \mathfrak{e}^s_{1,p}(0) = 0.$$

Ensuite, l'opérateur $h^s_{3,p}(\Delta^T_H, 0)$ est strictement positif pour $s \geq 1$; lorsque $s = 0$ son noyau est égal à $\mathcal{H}$. Il vient que

$$F^s_{2,p}(0) = 0 \text{ et } \mathfrak{f}^s_{1,p}(0) = 0$$

pour $0 \leq s \leq p$. Pour montrer que les espaces $E^s_{1,p}(0), F^s_{1,p}(0)$ sont réduits à zéro lorsque $0 \leq s \leq p$ nous notons que

$$P^s_p(\Delta^T_H, 0) = (\Delta^T_H + T^2 s(c_p + s))^2 + T^4 s(c_p + s)(c_p + 2s + 1)$$
$$R^s_p(\Delta^T_H, 0) = (\Delta^T_H + T^2 s(c_p + s - 1))^2 + T^4 s(c_p + s - 1)(c_p + 2s)$$

et on utilise le précédent argument de positivité. Concernant l'espace $\mathfrak{e}^s_{2,p}(0)$ remarquons qu'on a sur $\mathcal{H}^{2(p-s)}_1$:

$$(c_p + s + 1)\left[h^s_{2,p}(\Delta^T_H) - i\mathcal{L}_R\right] = (c_p + s)\Delta^T_H + T^2(s+1)(c_p + s + 1)^2$$

ce qui entraine immédiatement que

$$\mathfrak{e}^s_{2,p}(0) = 0.$$

Des arguments similaires nous conduisent à

$$\mathfrak{e}^s_{3,p}(0) = 0, \mathfrak{f}^s_{i,p}(0) = 0, i = 2, 3, 0 \leq s \leq p.$$

Par (4.2.1) il vient alors que

$$Harm(M, g_T) \cong F^{2p+2}_0(T) = \mathcal{H}^{2p+2}.$$

Comme $\mathcal{H}^{2p+2}$ est naturellement contenu dans $Harm(M, g_T)$ nous pouvons conclure.
(ii) La preuve est complètement analogue à celle donnée en (i) ■

Remarque 4.2.4
Le résultat précédent possède un intérèt du point de vue spectral. Nous allons voir que les espaces $\mathcal{H}$, donc les groupes de cohomologie de de Rham de M, produisent des valeurs propres privilégiées de (M, g_T). Lorsque $T \to 0$ nous obtiendront ainsi toutes les petites valeurs propres de (M, g_T) (voir le paragraphe 5.1)

Nous allons maintenant montrer comment on peut obtenir un PSV pour le spectre du laplacien des formes de (M, g_T). Faisons d'abord quelques préparatifs.

Définition 4.2.1
(i) Pour $0 \leq q \leq r$ soit

$$\sigma^q(T)$$

le spectre de Δ_H^T en restriction à $\mathcal{P}^q$.
(ii) Pour $0 \leq q \leq r$ soit

$$\sigma_{red}^q(T)$$

le spectre de l'opérateur Δ_H^T agissant sur l' espace $\mathcal{P}^q \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp$.
(iii) Lorsque $0 \leq q \leq r$ soient

$$\mathfrak{D}_1^q(T)$$

le spectre de l'opérateur $\Delta_H^T - i\mathcal{L}_R$ en restriction à l'espace $\mathcal{H}_1^q$;

$$\mathfrak{D}_2^q(T)$$

le spectre de l'opérateur

$$\Delta_H^T + i\mathcal{L}_R$$

en restriction à l'espace $\mathcal{H}_2^q \cap \mathcal{H}_1^\perp$;

$$\mathfrak{D}_3^q(T)$$

le spectre de l'opérateur Δ_H^T en restriction à l'espace $(\mathcal{H}_1^q + \mathcal{H}_2^q) \cap \mathcal{H}^\perp$.
(iv) Finalement, on note pour $0 \leq q \leq r$

$$\mathfrak{D}_4^q(T)$$

le spectre de l'opérateur Δ_H^T en restriction à l'espace $\mathcal{H}_1^q + \mathcal{H}_2^q$.

Pour $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$, $0 \leq q \leq 2p+1$ on définit une famille de fonctions

$$f_{i,p}^q : [0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}_+, 1 \leq i \leq 4$$

en posant

4.2.13
$$\begin{aligned}
f_{1,p}^q(x,T) &:= x + T^2\Big[(p - [\tfrac{q}{2}])(c_p + p - 1 - [\tfrac{q-1}{2}]) + \tfrac{r-q}{2}\Big] + T\sqrt{x + \tfrac{T^2(r-q)^2}{4}} \\
f_{2,p}^q(x,T) &:= x + T^2\Big[(p - [\tfrac{q}{2}])(c_p + p - 1 - [\tfrac{q-1}{2}]) + \tfrac{r-q}{2}\Big] - T\sqrt{x + \tfrac{T^2(r-q)^2}{4}} \\
f_{3,p}^q(x,T) &:= x + T^2(p + 1 + [\tfrac{1-q}{2}])(c_p + p - [\tfrac{q-1}{2}]) \\
f_{4,p}^q(x,T) &:= x + T^2(p - [\tfrac{q-1}{2}])(c_p + p + [\tfrac{1-q}{2}])
\end{aligned}$$

où par définition $c_p = r - 2p - 1$.

Remarque 4.2.5
Il est immédiat de s'assurer que les fonctions définies ci-dessus sont strictement croissantes en la première variable sur $]0, \infty[$.

On associe aux fonctions définies en (4.2.13) les ensembles suivants.

4.2.14
$$\begin{aligned}
\sigma_{i,p}^q(T) &:= \{f_{i,p}^q(\mu, T) : \mu \in \sigma_{red}^q(T)\}, i = 1, 2 \\
\sigma_{3,p}^q(T) &:= \{f_{4,p}^q(\mu, T) : \mu \in \sigma_{red}^q(T)\} \\
\mathfrak{h}_{1,p}^q(T) &:= \{f_{3,p}^q(\mu, T) : \mu \in \mathfrak{D}_1^q(T)\} \\
\mathfrak{h}_{2,p}^q(T) &:= \{f_{3,p}^q(\mu, T) : \mu \in \mathfrak{D}_2^q(T)\} \\
\mathfrak{h}_{3,p}^q(T) &:= \{f_{4,p}^q(\mu, T) : \mu \in \mathfrak{D}_3^q(T)\}
\end{aligned}$$

Étant donnée une collection, notée $\mathcal{C}$, du type défini en (4.1.2) et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la multiplicité de λ dans $\mathcal{C}$ comme le nombre des apparitions de λ dans $\mathcal{C}$; c'est 0 si λ n'est pas élement de $\mathcal{C}$. L'union de $\mathcal{C}$ avec une autre collection du même type, disons $\mathcal{C}'$, qui sera notée

$$\mathcal{C} + \mathcal{C}'$$

sera leur réunion comme ensembles avec la convention que la multiplicité d'un nombre dans cette union est la somme des multiplicités de ce nombre dans chacune des collections de l'union. Enfin, nous allons noter $2\mathcal{C}$ l'union $\mathcal{C} + \mathcal{C}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat qui nous permet d'obtenir le spectre du laplacien Δ_{g_T} en fonction du spectre de Δ_H^T.

Théorème 4.2.3 *(PSV dans le spectre des formes de (M, g_T))*
Soit $0 \leq p \leq r-1$ naturel. Nous avons :
(i) Si $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ le spectre de $\Delta_{g_T}^{2p+2}$ est donné par l'union

$$\begin{aligned} &\sigma^{2p+2}(T) + \sigma_{3p}^{2p+1}(T) + \sum_{q=0}^{2p} 2\sigma_{3p}^{q}(T) + \sum_{i=1,2,\ q=\overline{0,2p+1}} \sigma_{ip}^{q}(T) + \\ &+ \sum_{i=1,3\ q=\overline{0,2p+1}} \mathfrak{h}_{ip}^{q}(T). \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Le spectre des $2p+2$-formes fermées correspond à l'union

$$\begin{aligned} &\Big[\sum_{i=1,2\ q=\overline{0,p}} \sigma_{ip}^{2q}(T)\Big] + \sigma_{3p}^{2p+1}(T) + \sum_{q=0}^{p-1} 2\sigma_{3p}^{2q+1}(T) + \\ &+ \sum_{q=0}^{p} \Big[\mathfrak{h}_{1p}^{2q}(T) + \mathfrak{h}_{2p}^{2q}(T) + \mathfrak{h}_{3p}^{2q+1}(T)\Big]. \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

La partie cofermée du spectre de $\Delta_{g_T}^{2p+2}$ est donnée par l'union

$$\begin{aligned} &\sigma^{2p+2}(T) + \sum_{q=0}^{p} 2\sigma_{3p}^{2q}(T) + \sum_{i=1,2\ q=\overline{0,p}} \sigma_{ip}^{2q+1}(T) + \\ &+ \sum_{q=0}^{p} \Big[\mathfrak{h}_{1p}^{2q+1}(T) + \mathfrak{h}_{2p}^{2q+1}(T) + \mathfrak{h}_{3p}^{2q}(T)\Big]. \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

(ii) Si $p \geq [\frac{r}{2}]$ le spectre de $\Delta_{g_T}^{2p+2}$ est l'union de

$$\begin{aligned} &\sigma^{2(r-p)-1} + \sigma_{3p}^{2(r-p)-2}(T) + \sum_{q=0}^{2(r-p)-3} 2\sigma_{3p}^{q}(T) + \sum_{i=1,2\ q=\overline{0,2(r-p)-2}} \sigma_{ip}^{q}(T) + \\ &+ \sum_{i=1,3\ q=\overline{0,2(r-p)-2}} \mathfrak{h}_{ip}^{q}(T). \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Le spectre des $2p+2$-formes fermées est donné par l'union

4.2.19
$$\sum_{q=0}^{r-p-2} 2\sigma_{3p}^{2q+1}(T) + \sum_{i=1,2\ q=\overline{0,r-p-1}} \sigma_{ip}^{2q}(T) + \\ + \sum_{q=0}^{r-p-1}\Big[\mathfrak{h}_{1p}^{2q}(T) + \mathfrak{h}_{2p}^{2q}(T)\Big] + \sum_{q=0}^{r-p-2} \mathfrak{h}_{3p}^{2q+1}(T).$$

Le spectre des $2p+2$-formes cofermées est donné par l'union :

4.2.20
$$\sigma^{2(r-p)-1}(T) + \sigma_{3p}^{2(r-p-1)}(T) + \sum_{q=0}^{r-p-2} 2\sigma_{3p}^{2q}(T) + \sum_{i=1,2\ q=\overline{0,r-p-2}} \sigma_{ip}^{2q+1}(T) + \\ + \sum_{q=0}^{r-p-2}\Big[\mathfrak{h}_{1p}^{2q+1}(T) + \mathfrak{h}_{2p}^{2q+1}(T)\Big] + \sum_{q=0}^{r-p-1} \mathfrak{h}_{3p}^{2q}(T).$$

Ce résultat est l'analogue spectral du théorème 4.2.1 . Sa preuve sera donnée dans un instant.

Le théorème précédent montre que le spectre des formes de Δ_{g_T} se sépare en deux parties : une qui provient du spectre de la restriction de Δ_H^T à l'espace $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp$ et une qui est produite par les groupes de cohomologie de Dolbeault. Pour cette raison il y a lieu d'introduire la définition suivante.

Définition 4.2.2
Le **spectre cohomologique** *des $2p+2$-formes de (M, g_T), noté $\mathfrak{h}^{2p+2}(T)$ est défini par*

4.2.21
$$\mathfrak{h}^{2p+2}(T) = \begin{cases} \mathfrak{D}_4^{2p+2}(T) + \sum_{i=1,3\ q=0,2p+1} \mathfrak{h}_{ip}^q(T) \ si\ \ 0 \le p \le [\frac{r}{2}] - 1 \\ \mathfrak{D}_4^{2(r-p)-1}(T) + \sum_{i=1,3\ q=0,2(r-p)-2} \mathfrak{h}_{ip}^q(T) \ si\ [\frac{r}{2}] \le p \le r-1. \end{cases}$$

Remarque 4.2.6
Le théorème 4.2.2 précise la partie qui provient des formes fermées (resp. cofermées) du spectre cohomologique. Ces spectres seront notés $\mathfrak{f}^{2p+2}(T)$ et $\mathfrak{c}^{2p+2}(T)$. Nous avons :

4.2.22
$$\mathfrak{f}^{2p+2}(T) = \sum_{q=0}^{p} \mathfrak{h}_{1,p}^{2q}(T) + \mathfrak{h}_{2,p}^{2q}(T) + \mathfrak{h}_{3,p}^{2q+1}(T)$$

si $0 \le p \le [\frac{r}{2}] - 1$ *et*

4.2.23
$$\mathfrak{f}^{2p+2}(T) = \sum_{q=0}^{r-p-1}\Big[\mathfrak{h}_{1,p}^{2q}(T) + \mathfrak{h}_{2,p}^{2q}(T)\Big] + \sum_{q=0}^{r-p-2} \mathfrak{h}_{3,p}^{2q+1}(T) si\ [\tfrac{r}{2}] \le p \le r-1$$

si $[\frac{r}{2}] \le p \le r-1$. *Concernant le spectre cohomologique des formes cofermées on a*

4.2.24
$$\mathfrak{c}^{2p+2}(T) = \mathfrak{D}_4^{2p+2}(T) + \sum_{q=0}^{p}\Big[\mathfrak{h}_{1,p}^{2q+1}(T) + \mathfrak{h}_{2,p}^{2q+1}(T) + \mathfrak{h}_{3,p}^{2q}(T)\Big]$$

lorsque $0 \le p \le [\frac{r}{2}] - 1$ *et*

4.2.25
$$\mathfrak{c}^{2p+2}(T) = \mathfrak{D}_4^{2(r-p)-1}(T) + \sum_{q=0}^{r-p-2}\Big[\mathfrak{h}_{1,p}^{2q+1}(T) + \mathfrak{h}_{2,p}^{2q+1}(T)\Big] + \sum_{q=0}^{r-p-1} \mathfrak{h}_{3,p}^{2q}(T)$$

lorsque $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$.

Le spectre cohomologique est contenu dans le spectre des formes de (M, g_T). Les formes qui produisent ce spectre sont des formes harmoniques ou des éléments des groupes de cohomologie de Dolbeault. Cette partie du spectre sera analysée en détail en 5.1.

La signification du théorème 4.2.3 est donc que le spectre cohomologique et le spectre de Δ_H^T en restriction à $Ker(d_H^\star) \cap Ker(d_H^\star J)$ déterminent, via les fonctions définies en (4.2.13) le spectre des formes de (M, g_T).

On finit ce paragraphe en donnant la démonstration de notre dernier théorème.

Démonstration du théorème 4.2.3 :
Une vérification élémentaire nous assure que les espaces définis en (4.1.1) jouent le rôle d'espaces propres pour les collections définies en (4.2.14). En effet, si l'un des espaces

$$E_{i,p}^s(\lambda), i = \overline{1,2}, \mathfrak{e}_{j,p}^s(\lambda), j = \overline{1,3}$$

est non réduit à zéro alors, en déterminant les racines des polynômes de variable λ qui interviennent dans la définition de ces espaces, on obtient que

$$\lambda \in \begin{cases} \sigma_{1p}^{2(p-s)}(T) + \sigma_{2p}^{2(p-s)}(T) & \text{si} \quad i = 1 \\ \sigma_{3p}^{2(p-s)}(T) & \text{si} \quad i = 2 \\ \mathfrak{h}_{jp}^{2(p-s)}(T) & \text{si} \quad j \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

On a une correspondance similaire pour les autres espaces qui fait intervenir cette fois des collections dont l'indice supérieur est du type $2(p-s)+1$. On conclut donc par le théorème (4.2.1) ■

4.3 Démonstration du Théorème 4.2.1

4.3.1 La stratégie

Faisons d'abord le rappel suivant (voir la définition (3.3.1.1) et aussi (2.2.8))

Rappel 4.3.1
Soit $0 \leq p \leq r-1$, s *naturels tels que* $0 \leq s \leq p$ *si* $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}]-1$ *et* $2p+1-r \leq s \leq p$ *si* $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$. *Alors :*
(i) $\mathcal{T}_{2p+2}^s$ *est l'espace des couples de formes* $(\alpha, \beta) \in \Lambda^{2p+2}(H) \times \Lambda^{2p+1}(H)$ *avec décomposition de Lefschetz de la forme*

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} (\sum_{i=0}^{s+1} L^i \alpha_i, \sum_{j=0}^{s} L^j \beta_j) \text{ si } 0 \leq p \leq [\frac{r}{2}]-1 \\ (\sum_{i=2p+1-r}^{s+1} L^i \alpha_i, \sum_{j=2p+1-r}^{s} L^j \beta_j) \text{ si } [\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1. \end{cases}$$

(ii) $\mathcal{R}^s_{2p+2}$ *est l'espace définit par*

$$\mathcal{R}^s_{2p+2} = Ker(\Pi^1) \cap \mathcal{T}^s_{2p+2}$$

où $\Pi^1 : \mathcal{T}^s_{2p+2} \to \mathcal{S}^{2p-2s}$ *est donnée par :*

$$\Pi^1(\alpha, \beta) = \alpha_{s+1}.$$

Nous rappelons aussi que nous avons une filtration (voir le paragraphe 3.3.1) :

4.3.1 $$\mathcal{T}^{-1}_{2p+2} \subseteq \mathcal{T}^0_{2p+2} \subseteq \mathcal{T}^1_{2p+2} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{T}^p_{2p+2} = \Lambda^{2p+2}(M).$$

Précisons que $\mathcal{T}^{-1}_{2p+2} \cong \mathcal{S}^{2p+2}$ et que, lorsque $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$, nous avons $\mathcal{R}^{2p+1-r}_{2p+2} \cong \mathcal{S}^{2(p-r)-1}$.

L'idée de départ vers la preuve du théorème 4.2.1 est d'utiliser cette filtration pour étudier les espaces propres de $\Delta^{2p+2}_{g_T}$. Commencons par prendre (α, β) une forme propre de Δ_{g_T}. On montre qu'on peut se ramener à une forme propre dans $\mathcal{T}^{p-1}_{2p+2}$. Ceci revient à étudier le quotient

$$E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) / \left[E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{T}^{p-1}_{2p+2}\right].$$

En général, nous allons montrer que l'étude d'une forme propre du type $\mathcal{T}_{2p+2}$ peut se ramener à l'étude d'une forme propre du type $\mathcal{T}^{s-1}_{2p+2}$. En d'autres termes, nous allons étudier les quotients

4.3.2 $$\left[E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{T}^s_{2p+2}\right] / \left[E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{T}^{s-1}_{2p+2}\right].$$

On va montrer que ces quotients sont isomorphes à des sommes directes d'espaces comme on en a définis en 4.1.1.

Cette étude est structurée comme suit. Dans un premier temps, nous allons décrire l'espace

$$\left[E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{T}^s_{2p+2}\right] / \left[E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{R}^s_{2p+2}\right].$$

En d'autres termes pour, nous montrons que pour l'étude d'une forme propre du type $\mathcal{T}^s_{2p+2}$ on peut supposer que $\alpha_{s+1} = 0$. Ceci sera fait au paragraphe 4.3.2. Le résultat qui décrit la structure de notre espace est la proposition 4.3.2.1.

Au paragraphe 4.3.3 nous ennoncons et démontrons le résultat qui exprime, à isomorphisme près, l'espace

$$\left[E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{R}^s_{2p+2}\right] / \left[E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{T}^{s-1}_{2p+2}\right]$$

comme somme directs d'espaces du type définit en 4.1.1. Il s'agit de la proposition 4.3.3.1.

A l'aide des résultats des paragraphes 4.3.2 et 4.3.3, on obtient, au paragraphe 4.3.4, une description complète du quotient (4.3.2). Ceci nous permet de donner la preuve du théorème 4.2.1, par récurrence, en utilisant la filtration (4.3.1).

Comme annoncé auparavant, un usage massif sera fait des formules développées en (2.2), ainsi que des résultats du chapitre 3.

4.3.2 L'espace $E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{T}_{2p+2}^s$

En nous appuyant sur la technique que nous avons developpée au chapitre 3, le premier pas vers la preuve de notre théorème peut être résumé comme suit.

Etant donnée $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_{2p+2}^s$ une forme propre pour $\Delta_{g_T}^{2p+2}$ nous allons montrer que α_{s+1} est élément d'un espace du type E (défini en 3.2.1) qui s'obtient à partir de polynômes P, Q, R convenablement choisis. Cela va nous permettre d'appliquer les résultats de décomposition des paragraphes 3.2.2 et 3.2.3.

Cependant, pour mieux comprendre les origines de notre théorie nous allons tout d'abord montrer que si (α, β) est une forme propre, il existe des polynômes universels en Δ_H^T et λ qui s'annulent sur le bas de la décomposition de Lefschetz de α. Remarquons que l'appartenance à un espace du type E garantit ce genre de résultat (voir (3.2.1.1)).

Nous avons le lemme fondamental suivant.

Lemme 4.3.2.1
Soit $p \geq 0$ et $0 \leq s \leq p$. Si $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_{2p+2}^s$, est une forme propre de $\Delta_{g_T}^{2p+2}$ pour la valeur propre λ alors

4.3.2.1
$$\left[(h_{2,p}^s)^2(\Delta_H^T, \lambda) + \mathcal{L}_R^2\right](h_{1,p}^s \cdot P_p^s)(\Delta_H^T, \lambda)\alpha_{s+1} = 0.$$

Remarque 4.3.2.1
(i) L'opérateur polynômial, en $\mathcal{L}_R, \Delta_H^T$ et λ) qui apparait ci-dessus sera appelé polynôme **caractéristique** *de Δ_{g_T} sur les formes différentielles du type $\mathcal{T}_{2p+2}^s$.*
(ii) La preuve du lemme ci-dessus contient tous les éléments nécessaires pour démontrer, ensuite, que α_{s+1} vit dans un espace du type E. C'est l'équation (4.3.2.1) qui nous donne l'idée de décomposer la forme α_{s+1} suivant les facteurs du polynôme caractéristique. La première partie du chapitre 3 représente la formalisation de cette idée.

Démonstration du lemme 4.3.2.1 :
Par (2.2.19) on obtient le système différentiel :

4.3.2.2
$$\begin{cases} \Delta_H^T\alpha + T^2LL^\star\alpha - (Jd_HJ)\beta = \lambda \cdot \alpha \\ \Delta_H^T\beta + T^2L^\star L\beta + T^2(Jd_H^\star J)\alpha = \lambda \cdot \beta \end{cases}.$$

Pour $0 \leq i \leq p$ définissons

$$\alpha^i := (L^\star)^i\alpha \in \Lambda^{2(p-i)+2}(H) \text{ and } \beta^i := (L^\star)^i\beta \in \Lambda^{2(p-i)+1}(H).$$

On a facilement

$$\alpha^{s+1} = (s+1)!\prod_{j=0}^{s}(r - 2p + s + j) \cdot \alpha_{s+1} \text{ et } \beta^s = s!\prod_{j=0}^{s-1}(r - 2p + s + j) \cdot \beta_s.$$

En particulier, α^{s+1} and β^s sont primitives. Par application de $(L^\star)^{s+1}$ resp. $(L^\star)^s$ à (4.3.2.2) et en tenant compte de (2.2.6) et (2.2.16) on obtient après calcul

4.3.2.3
$$\begin{cases} h^s_{2,p}(\Delta^T_H,\lambda)\alpha^{s+1} = -(s+1)d^\star_H\beta^s \\ (d^\star_H J)\alpha^{s+1} = 0 \end{cases}$$

resp.

4.3.2.4
$$\begin{cases} h^s_{3,p}(\Delta^T_H,\lambda)\alpha^s + T^2L\alpha^{s+1} = (Jd_HJ)\beta^s - sd^\star_H\beta^{s-1} \\ h^s_{1,p}(\Delta^T_H,\lambda)\beta^s = -T^2(Jd^\star_HJ)\alpha^s. \end{cases}$$

On va voir que les 2 systèmes précédents contiennent toutes les informations concernant α_{s+1}. On continue la preuve par étapes.

Etape 1 : L'élimination de α^s de (4.3.2.4).

Par application de $Jd^\star_HJ$ à la première équation de (4.3.2.4) on obtient, moyennant le fait que $J\alpha^{s+1}$ est horizontalement cofermée, l'équation

$$h^s_{3,p}(\Delta^T_H,\lambda)(Jd^\star_HJ)\alpha^s = -\mathcal{L}_Rd^\star_H\alpha^s - T^2d_H\alpha^{s+1} + (Jd^\star_Hd_HJ)\beta^s - sH_s$$

où, par définition, $H_s = (d^\star_HJ)^2\beta^{s-1}$. En y remplaçant $(d^\star_HJ)\alpha^s$ donnée par la seconde équation de (4.3.2.4) on arrive à

4.3.2.5
$$\begin{aligned} &(h^s_{1,p}\cdot h^s_{3,p})(\Delta^T_H,\lambda)\beta^s = T^2\mathcal{L}_Rd^\star_H\alpha^s + T^4d_H\alpha^{s+1} - \\ &-T^2(Jd^\star_Hd_HJ)\beta^s + sT^2H_s \end{aligned}$$

qui ne contient pas de terme en α^s.

Etape 2 : Polynômes annulateurs pour $d^\star_H\alpha^{s+1}$ et $d_Hd^\star_H\alpha^{s+1}$.

De nouveau par le fait que $J\alpha^{s+1}$ est horizontalement cofermée, par application successive de $d^\star_H$ et $d^\star_HJ$ à la première équation de (4.3.2.3) on trouve

4.3.2.6
$$\begin{cases} h^s_{2,p}(\Delta^T_H,\lambda)d^\star_H\alpha^{s+1} = 0 \\ \mathcal{L}_Rd^\star_H\alpha^{s+1} + (s+1)(d^\star_HJ)^2\beta^s = 0. \end{cases}$$

La première équation de (4.3.2.6) et la deuxième équation de (4.3.2.3) nous permettent d'appliquer le lemme 3.2.1.1 à la forme α^{s+1} et au polynôme $P = h_{2,p}(\cdot,\lambda)$. Il vient que :

4.3.2.7
$$((h^s_{2,p})^2 + \mathcal{L}_R^2)(\Delta^T_H,\lambda)d_Hd^\star_H\alpha^{s+1} = 0.$$

Finalement, notons que l'application de $d^\star_HJ$ à la seconde équation de (4.3.2.4) conduit à

4.3.2.8
$$h^s_{1,p}(\Delta^T_H,\lambda)(d^\star_HJ)\beta^s = T^2\cdot\mathcal{L}_RJ\alpha^{s+1} + \mathcal{L}_R(Jd^\star_H)\beta^s.$$

Etape 3 : L'équation fondamentale pour α^{s+1}.

On collecte d'abord quelque faits.
(i) $d^\star_HH_s = \mathcal{L}_R(Jd^\star_HJ)\beta^s$.

La preuve en est évidente. Ensuite on démontre que
(ii)

$$d_H^\star(Jd_H^\star d_H J)\beta^s = -\tfrac{1}{s+1}h_{2,p}^s(\Delta_H^T,\lambda)d_H d_H^\star\alpha^{s+1}+$$
$$+(c_p+2s)\mathcal{L}_R(Jd_H^\star J)\beta^s - \Delta_H(d_H^\star\beta^s).$$

En effet, remarquons que

$$d_H^\star(Jd_H^\star d_H J)\beta^s = J(d_H^\star J)^2(d_H J)\beta^s = Jd_H^\star(Jd_H^\star Jd_H)J\beta^s.$$

Par (2.2.18) il s'ensuit que notre quantité est égale à

$$-J(d_H^\star d_H)Jd_H^\star\beta^s + (c_p+2s)\mathcal{L}_R(Jd_H^\star J)\beta^s.$$

Mais en utilisant la seconde équation de (4.3.2.6) on a

$$J(d_H^\star d_H)Jd_H^\star\beta^s = \Delta_H(d_H^\star\beta^s) + Jd_H J(d_H^\star J)^2\beta^s =$$
$$= \Delta_H(d_H^\star\beta^s) - \tfrac{1}{s+1}\mathcal{L}_R(Jd_H Jd_H^\star)\alpha^{s+1}.$$

Comme l'application de d_H à la première équation de (4.3.2.3) nous donne que

$$-\mathcal{L}_R(Jd_H Jd_H^\star)\alpha^{s+1} = h_{2,p}^s(\Delta_H^T,\lambda)d_H d_H^\star\alpha^{s+1}$$

l'assertion (ii) est démontrée.

Définissons $Q_p^s \in \mathbb{R}[X,Y]$ par $Q_p^s := h_{1,p}^s \cdot h_{3,p}^s - T^2X$. On applique la codifférentielle à (4.3.2.5). En faisant usage de l'identité (2.2.2.4) et des faits énoncés ci-dessus, on est conduit après calcul à

4.3.2.9
$$\left[Q_p^s(\Delta_H^T,\lambda) - \mathcal{L}_R^2\right]d_H^\star\beta^s = -2\mathcal{L}_R\cdot h_{1,p}^s(\Delta_H^T,\lambda)(Jd_H^\star J)\beta^s+$$
$$+T^2\cdot\mathcal{L}_R^2\alpha^{s+1} + T^4\cdot\Delta_H\alpha^{s+1} + \tfrac{T^2}{s+1}h_{1,p}^s(\Delta_H^T,\lambda)(d_H d_H^\star)\alpha^{s+1}.$$

Maintenant par la première équation de (4.3.2.3) on trouve

4.3.2.10
$$d_H^\star\beta^s = -\tfrac{1}{s+1}h_{2,p}^s(\Delta_H^T,\lambda)\alpha^{s+1}.$$

Par (4.3.2.8) et l'identité précédente on arrive à

4.3.2.11
$$h_{1,p}^s(\Delta_H^T,\lambda)(Jd_H^\star J)\beta^s = -\tfrac{1}{s+1}\mathcal{L}_R h_{1,p}^s(\Delta_H^T,\lambda)\alpha^{s+1}.$$

En remplaçant les valeurs de $d_H^\star\beta^s$ et $h_{1,p}^s(\Delta_H^T,\lambda)(Jd_H^\star J)\beta^s$ données par (4.3.2.10) et (4.3.2.11) dans (4.3.2.9) on établit après calcul

4.3.2.12
$$(h_{1,p}^s\cdot P_p^s)(\Delta_H^T,\lambda)\alpha^{s+1} = -T^2h_{1,p}^s(\Delta_H^T,\lambda)(d_H d_H^\star)\alpha^{s+1}.$$

L'équation caractéristique (4.3.2.1) vient maintenant par (4.3.2.7) et par le fait que α^{s+1} est un facteur non nul de α_{s+1} ■

Remarque 4.3.2.2
D'un point de vue technique le tout premier pas vers le principe de séparation des variables est l'élimination de la forme β du système (4.3.2.2). Le formalisme nécessaire pour la suite est motivé par les équations obtenues au cours de la preuve du lemme 4.3.2.1.

On s'attache maintenant à comprendre la structure de la forme α_{s+1}.

Définition 4.3.1
Nous définissons les espaces

$$\mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda) \text{ et } I^s_{1,p}(\lambda)$$

comme étant les espaces E_1, I_1 introduits par la définition 3.2.2.1, lorsque

$$q = 2(p-s), P = h^s_{2,p}(\cdot,\lambda), b = T^2(s+1).$$

En utilisant la démonstration du lemme précédent, nous montrons maintenant que la forme α_{s+1} appartient à un certain espace du type E. Ceci va nous permettre d'obtenir des résultats de décomposition concernant la forme α_{s+1}, moyennant la proposition 3.2.2.1.

Lemme 4.3.2.2
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathcal{T}^s_{2p+2}$ une forme propre pour $\Delta^{2p+2}_{g_T}$ avec v.p. λ. Alors :
(i) α_{s+1} appartient à l'espace E qui s'obtient en prenant

$$q = 2(p-s), P = h^s_{2,p}(\cdot,\lambda) \text{ et } b = T^2(s+1).$$

(ii) α_{s+1} se décompose de manière unique comme

$$\alpha_{s+1} = \alpha^1_{s+1} + \alpha^2_{s+1} + \alpha^3_{s+1}$$

où $\alpha^1_{s+1} \in E^s_{1,p}(\lambda), \alpha^2_{s+1} \in \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda), \alpha^3_{s+1} \in I^s_{1,p}(\lambda)$.

Démonstration :
(i) La forme α_{s+1} satisfait les conditions :

(j_1) par la deuxième équation de $(4.3.2.3)$;
(j_2) par la première équation de $(4.3.2.6)$;
(j_3) par $(4.3.2.12)$;
(j_4) par la première équation de $(4.3.2.3)$, car $Im\ d^\star_H \subseteq \mathcal{H}^\perp$.

Remarquons que par (4.3.2.10) et (4.3.2.11) on a

4.3.2.13 $$h^s_{1,p}(\Delta^T_H,\lambda)\overline{\partial_H}^\star\beta^s = -\tfrac{1}{2(s+1)}\Big[h^s_{1,p}(h^s_{2,p} - i\mathcal{L}_R)\Big](\Delta^T_H,\lambda)\alpha^{s+1}.$$

Or

$$h^s_{1,p}(\Delta^T_H,\lambda)\overline{\partial_H}^\star = \overline{\partial_H}^\star\Big[h^s_{1,p}(\Delta^T_H) - i\mathcal{L}_R\Big],$$

donc α_{s+1} (qui est un multiple non nul de α^{s+1}) satisfait (j_5) par le fait que $Im\overline{\partial_H}^\star \subseteq \mathcal{H}^\perp_1$.
De nouveau par (4.3.2.10) et (4.3.2.11) nous obtenons

4.3.2.14 $$h^s_{1,p}(\Delta^T_H,\lambda)\partial^\star_H\beta^s = -\tfrac{1}{2(s+1)}\Big[h^s_{1,p}(h^s_{2,p} + i\mathcal{L}_R)\Big](\Delta^T_H,\lambda)\alpha^{s+1}.$$

Comme

$$h^s_{1,p}(\Delta^T_H, \lambda)\partial^\star_H = \partial^\star_H \Big[h^s_{1,p}(\Delta^T_H) + i\mathcal{L}_R\Big]$$

et $Im\partial^\star_H \subseteq \mathcal{H}_2^\perp$ nous avons que α_{s+1} satisfait également (j_6). Donc α_{s+1} est un élement de E.
(ii) Il suffit d'appliquer la proposition 3.2.2.1 pour $P = h^s_{2,p}(\cdot, \lambda), Q = h^s_{1,p}(\cdot, \lambda)$ et $q = 2(p-s) < r$ ■

Pour compléter le résultat de décomposition du lemme 4.3.2.2, nous avons besoin de sa réciproque dans le sens qu'il nous faut voir que les espaces $E^{s,k}_{1,p}(\lambda), \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda), I^s_{1,p}(\lambda)$ produisent des formes propres pour $\Delta^{2p+2}_{g_T}$. Il s'agit d'un cas spécial des lemmes 3.3.3.1, 3.3.4.2 et 3.3.2.1, comme suit.

Lemme 4.3.2.3
Supposons que le nombre naturel s vérifie $0 \leq s \leq p$ si $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ et $2p + 1 - r \leq s \leq p$ si $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r - 1$.
Les applications suivantes sont des injections linéaires :
(i) $f^s_{1,p} : E^s_{1,p}(\lambda) \to E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap Im\, d$ donnée par :

4.3.2.15 $$f^s_{1,p} := d \circ ((Jd_H J)L^s, h^s_{3,p}(D^T_H, \lambda)L^s) \circ G_1$$

où G_1 est l'opérateur de Green de $-\frac{1}{c_p+2s+1}\Delta_H + h^s_{3,p}(\Delta^T_H, \lambda)$ sur $\Lambda^\star(H)$;
(ii) $f^s_{2,p} : \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda) \to E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap Im\, d^\star_{g_T}$ définie pour $c_p + s > 0$ par

4.3.2.16 $$f^s_{2,p} := \tfrac{c_p+2s+1}{c_p+s}\, d^\star_{g_T} \circ (L^{s+1}d_H, 0) \circ G^{\Delta_H} \text{ si } c_p + s > 0.$$

(iii) $f^s_{3,p} : I^s_{1,p}(\lambda) \to E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap Im\, d$ définie par

4.3.2.17 $$f^s_{3,p} := d \circ (0, L^s)$$

Pour $i = \overline{1,3}$, l'image de l'application $f^s_{i,p}$ est contenue dans $\mathcal{T}^s_{2p+2}$. Nous avons

$$\Pi^1 \circ f^s_{i,p} = 1_{\mathcal{S}^{2(p-s)}}.$$

La démonstration de ce résultat sera ommise car simple conséquence des lemmes 3.3.3.1,3.3.4.2 et 3.3.2.1. A l'aide de la décomposition du lemme 4.3.2.2 et du lemme précédent nous pouvons avancer dans l'étude des formes propres du type $\mathcal{T}^s_{2p+2}$, dans le sens que nous serons capables de décrire le quotient

$$\Big[E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{T}^s_{2p+2}\Big] / \Big[E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{R}^s_{2p+2}\Big].$$

Il y a cependant un problème suplémentaire à résoudre, dû au fait que l'application $f^s_{2,p}$ n'est pas définie pour $c_p + s = 0$. Nous avons :

Proposition 4.3.2.1
(i) Lorsque $c_p + s > 0$ nous avons un isomorphisme

4.3.2.18 $$\mathcal{T}^s_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong E^s_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda) \oplus I^s_{1,p}(\lambda) \oplus \Big[\mathcal{R}^s_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})\Big];$$

(ii) Dans le cas $c_p + s = 0$ on a

4.3.2.19 $$\mathcal{T}^s_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong E^s_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda) \oplus I^s_{1,p}(\lambda) \oplus F^{2(r-p)-1}_\lambda(T).$$

Démonstration :
(i) Par les lemmes 4.3.2.2 et 4.3.2.3, l'application qui à $\alpha + \beta \wedge \theta \in \mathcal{T}^s_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})$ associe

$$(\alpha^1_{s+1}, \alpha^2_{s+1}, \alpha^3_{s+1}, \alpha + \beta \wedge \theta - f^s_{1,p}(\alpha^1_{s+1}) - f^s_{2,p}(\alpha^2_{s+1}) - f^s_{3,p}(\alpha^3_{s+1}))$$

nous donne l'isomorphisme désiré.
(ii) Par le même raisonnement qu'en (i) , mais en considérant cette fois l'application qui à $\alpha + \beta \wedge \theta \in E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{T}^s_{2p+2}$ associe

$$(\alpha^1_{s+1}, \alpha^3_{s+1}, \alpha + \beta \wedge \theta - f^s_{1,p}(\alpha^1_{s+1}) - f^s_{3,p}(\alpha^3_{s+1}))$$

nous obtenons un isomorphisme

$$\mathcal{T}^s_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong E^s_{1,p}(\lambda) \oplus I^s_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{U}_p$$

où l'espace $\mathcal{U}_p$ est défini par

$$\mathcal{U}_p = \{\alpha + \beta \wedge \theta \in \mathcal{T}^s_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) : \alpha_{s+1} \in \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda)\}.$$

Il nous reste donc à démontrer l'existence d'un isomorphisme

$$\mathcal{U}_p \cong \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda) \oplus F^{2(r-p)-1}_\lambda(T).$$

Remarquons d'abord que $c_p + s = 0$ ssi $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$; par la décomposition de Lefschetz

$$\mathcal{T}^s_{2p+2} = L^{s+1}\mathcal{S}^{2(p-s)} + \left[L^s\mathcal{S}^{2(p-s)+1}\right] \wedge \theta.$$

Soit $\gamma \in \mathcal{U}_p$. Nous avons donc

$$\gamma = L^{s+1}\phi + (L^s\psi) \wedge \theta$$

avec ϕ, ψ primitives et $\phi \in \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda)$. Nous allons exploiter le fait que $\alpha + \beta \wedge \theta$ est propre, donc vérifie le système (4.3.2.2). Des considérations élementaires conduisent à

$$\begin{cases} (\Delta^T_H + T^2(s+1) - \lambda)\phi + \frac{1}{s+1}d^\star_H\psi = 0 \\ (\Delta^T_H - \lambda)\psi + T^2(s+1)d_H\phi = 0 \end{cases}$$

où encore, comme $\phi \in \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda)$, à

4.3.2.20 $$\begin{cases} T^2(s+1)\phi + \frac{1}{s+1}d^\star_H\psi = 0 \\ (\Delta^T_H - \lambda)\psi + T^2(s+1)d_H\phi = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant l'application

$$p : \mathcal{U}_p \to \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda),\ p(\gamma) := (d^\star_H J)\psi.$$

Nous allons montrer que p est bien définie, calculer son noyau et montrer qu'elle est surjective.

• p est bien définie.

Il est clair que $(d_H^\star J)\psi \in Ker d_H^\star$ car ψ est primitive. Comme $\phi \in Ker(d_H^\star J)$ il vient que

$$(Jd_H^\star)^2\psi = (d_H^\star J)^2\psi = 0$$

donc $(d_H^\star J)\psi \in Ker(d_H^\star J)$.

Il nous reste à voir que

$$(d_H^\star J)\psi \in Ker\left[\Delta_H^T - \lambda\right].$$

On applique $d_H^\star J$ à la deuxième équation de (4.3.2.20). Il vient que :

$$(\Delta_H^T - \lambda)(d_H^\star J)\psi + T^2(s+1)d_H^\star J d_H\phi = [\Delta_H, d_H^\star J]\phi.$$

Or

$$d_H^\star J d_H\phi = -(s+1)J\mathcal{L}_R\phi$$

par (2.2.18) et le fait que $\phi \in Ker(d_H^\star J)$. Comme

$$[\Delta_H, d_H^\star J]\psi = \mathcal{L}_R(Jd_H^\star\psi)$$

(par (2.2.2.4)) on trouve

$$(\Delta_H^T - \lambda)(d_H^\star J)\psi = T^2(s+1)^2\mathcal{L}_R J\phi + \mathcal{L}_R(Jd_H^\star\psi) = 0$$

par la première équation de (4.3.2.20).

• $Ker\ p \cong F_\lambda^{2(r-p)-1}(T)$.

Soit $\gamma = L^{s+1}\phi + L^s\psi \wedge \theta \in Ker(p)$. On applique $d_H^\star$ à la deuxième équation de (4.3.2.20). Nous obtenons :

$$(\Delta_H^T - \lambda)d_H^\star\psi + T^2(s+1)d_H^\star d_H\phi = [\Delta_H, d_H^\star]\psi = -\mathcal{L}_R(Jd_H^\star J)\psi = 0.$$

Or, par la première équation de (4.3.2.20), nous avons que $d_H^\star\phi \in Ker(\Delta_H^T - \lambda)$ donc $d_H^\star d_H\phi = 0$. Comme $\phi \in \mathcal{P}^{2(p-r)-2}$ ceci implique $\phi \in \mathcal{H}$ donc $\phi = 0$. Par conséquent $\psi \in F_\lambda^{2(r-p)-1}(T)$.

Réciproquement, on a une inclusion évidente

$$F_\lambda^{2(r-p)-1}(T) \to Ker\ p, \psi \to L^s\psi \wedge \theta.$$

Par ce qui précède, cette inclusion nous donne l'isomorphisme désiré.

• p est surjective

Soit $u \in \mathcal{E}_{2,p}^s(\lambda)$. et $v := G^{\Delta_H}u$. Nous définissons les formes primitives

$$\phi = -\frac{1}{T^2(s+1)}\mathcal{L}_R(Jv),\ \psi := -Jd_H v.$$

Soit $\gamma := L^{s+1}\phi + L^s\psi \wedge \theta$. Montrons que

$$p(\gamma) = u.$$

En effet :

$$p(\gamma) = (d_H^\star J)\psi = d_H^\star d_H v = \Delta_H v = u$$

car $u \in \mathcal{H}^\perp$.
Montrons que

$$\gamma \in \mathcal{U}_p.$$

Nous avons que $v \in \mathcal{E}_{2,p}^s(\lambda)$, un espace préservé par l'opérateur $\mathcal{L}_R J$ donc $\phi \in \mathcal{E}_{2,p}^s(\lambda)$. Nous devons maintenant vérifier que (ϕ, ψ) satisfait (4.3.2.20). Nous avons que

$$d_H^\star \psi = -(d_H^\star J d_H)v = (s+1)\mathcal{L}_R(Jv)$$

par (2.2.18) et le fait que $v \in \mathcal{P}^{2(p-s)}$, donc la première équation de (4.3.2.20) est satisfaite. Pour la deuxième, on a

$$\begin{aligned} &-(\Delta_H^T - \lambda)\psi = (\Delta_H^T - \lambda)(J d_H v) = J d_H(\Delta_H^T - \lambda)v + J[\Delta_H, d_H]v = \\ &= -d_H(\mathcal{L}_R J v) = T^2(s+1)d_H\phi \end{aligned}$$

car $v \in Ker\left[\Delta_H^T - \lambda\right]$ et $[\Delta_H, d_H]v = \mathcal{L}_R(J d_H J)v$ par (2.2.2.3).

On conclut que $\gamma \in \mathcal{U}_p$, ce qui montre que p est surjective. par conséquent nous avons l'isomorphisme (4.3.2.19) ■

La démonstration de la proposition précédente nous fournit l'application qui réalise l'espace $F^{2(r-p)-1}(T)$ comme espace propre de $\Delta_{g_T}^{2p+2}$. Nous allons maintenant déterminer s'il s'agit de formes fermées ou cofermées.

Lemme 4.3.2.4
Supposons que $c_p + s = 0$ (et donc $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$). L'image de l'application injective

$$f_p : F_\lambda^{2(r-p)-1}(T) \to E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2})$$

définie par

$$f_p(\alpha) = (0, L^s\alpha)$$

est contenue dans Ker(d).

Démonstration :
Soit $\alpha \in F_\lambda^{2(r-p)-1}(T)$. Nous avons alors (cf.(2.1.5)) :

$$d(L^s(\alpha) \wedge \theta) = -L^{s+1}(\alpha) + \left[L^s(d_H\alpha)\right] \wedge \theta.$$

Or $\alpha \in \mathcal{S}^{2(r-p)-1} = \mathcal{S}^{r-s}$, car $s + c_p = 0$. Alors $L^{s+1}\alpha = 0$ par (2.2.7). Ensuite, $d_H\alpha \in \mathcal{S}^{r-(s-1)}$ car $d_H^\star\alpha = d_H^\star(J\alpha) = 0$. De nouveau par $(2.2.7)$ nous avons que $L^s(d_H\alpha) = 0$ ■

Faisons un bref résumé des résultats obtenus dans ce paragraphe. Lorsque $c_p + s = 0$, nous avons une description complète de l'espace

$$E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{T}_{2p+2}^s$$

donnée par la proposition 4.3.2.1, (ii).

Dans le cas $c_p + s > 0$, la même proposition, (i) caractérise le quotient

$$\left[E_\lambda^{2p+2}(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{T}_{2p+2}^s\right] / \left[E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{R}_{2p+2}^s\right].$$

4.3.3 L'espace $E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{R}_{2p+2}^s$

Comme annoncé auparavant, pour la preuve du théorème 4.2.1, nous devons déterminer l'espace quotient

$$\left[E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{T}_{2p+2}^s\right] / \left[E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{T}_{2p+2}^{s-1}\right].$$

En vue des résultats de la section précédente, il nous reste à calculer l'espace

$$\left[E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{R}_{2p+2}^s\right] / \left[E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{T}_{2p+2}^{s-1}\right].$$

Ceci fera l'objet de ce paragraphe. Nous allons travailler dans l'esprit du paragraphe précédent.

On commence par établir l'existence d'un polynôme caractéristique pour la forme β_s, lorsque $(\alpha, \beta) \in E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{R}_{2p+2}^s$.

Lemme 4.3.3.1
Soit $\alpha + \beta \wedge \theta \in E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{R}_{2p+2}^s$. La forme β_s verifie l'équation :

4.3.3.1 $$\left[(h_{1,p}^s)^2(\Delta_H^T, \lambda) + \mathcal{L}_R^2\right](h_{3,p}^s \cdot R_p^s)(\Delta_H^T, \lambda)\beta_s = 0.$$

Démonstration :
Nous allons reprendre les équations obtenues dans la preuve du lemme 4.3.2.1 dans notre situation actuelle, c'est à dire $\alpha_{s+1} = 0$.
Par la première équation de (4.3.2.3) nous obtenons que

4.3.3.2 $$d_H^\star \beta^s = 0.$$

Ensuite, l'équation (4.3.2.8) devient

4.3.3.3 $$h_{1,p}^s(\Delta_H^T, \lambda)(d_H^\star J)\beta^s = 0.$$

En reconsidérant l'équation (4.3.2.5) nous obtenons

4.3.3.4 $$(h_{1,p}^s \cdot h_{3,p}^s)(\Delta_H^T, \lambda)\beta^s = T^2 \mathcal{L}_R d_H^\star \alpha^s - T^2(J d_H^\star d_H J)\beta^s + sT^2 H_s.$$

Par conséquent on a besoin d'équations annulatrices pour $d_H^\star \alpha^s$, $(J d_H d_H^\star J)\beta^s$ et H_s. On codifférentie la première équation de (4.3.2.4). Nous avons

$$h_{3,p}^s(\Delta_H^T) d_H^\star \alpha^s = d_H^\star (J d_H J)\beta^s - s\mathcal{L}_R \beta^s + \mathcal{L}_R (J d_H^\star J)\alpha^s.$$

Or

$$d_H^\star (J d_H J)\beta^s = (c_p + s)\mathcal{L}_R \beta^s$$

par (2.2.18) et le fait que β^s est horizontalement cofermée. Vu ceci et en remplaçant dans notre avant-dernière équation la valeur de $(J d_H^\star J)\alpha^s$ donnée par la seconde équation de (4.3.2.4) on arrive après calcul à

4.3.3.5 $$h^s_{3,p}(\Delta^T_H,\lambda)d^\star_H\alpha^s = -\tfrac{1}{T^2}h^s_{3,p}(\Delta^T_H,\lambda)\mathcal{L}_R\beta^s.$$

Par le lemme 3.2.2.1 appliqué à la forme $J\beta^s$ (ici $P = h^s_{1,p}(\cdot,\lambda)$) nous avons

4.3.3.6 $$\Big[(h^s_{1,p})^2(\Delta^T_H,\lambda) + \mathcal{L}^2_R\Big](Jd_Hd^\star_HJ)\beta^s = 0.$$

Agissons maintenant avec $(d^\star_HJ)^2(L^\star)^{s-1}$ dans la seconde équation de (4.3.2.2). En tenant compte que $(d^\star_HJ)^2$ commute avec Δ^T_H et $L^\star$ nous obtenons :

$$(\Delta^T_H-\lambda)H_s + T^2(d^\star_HJ)^2\Big[(L^\star)^sL\beta\Big] - T^2\mathcal{L}_Rd^\star_H\alpha^s = 0.$$

Or

$$(L^\star)^sL\beta = L\beta^s + s(c_p+s-1)H_s$$

par (2.2.6) donc il nous reste à calculer $(d^\star_HJ)^2L\beta^s$. On a :

$$(d^\star_HJ)^2L\beta^s = (Jd^\star_H)^2L\beta^s = (Jd^\star_HJ)(d^\star_HL)\beta^s = (Jd^\star_HJ)(Ld^\star_H\beta^s + (Jd_HJ)\beta^s) =$$
$$= J(d^\star_Hd_H)J\beta^s = -\Delta_H\beta_s - Jd_Hd^\star_HJ\beta^s.$$

Ces faits nous conduisent à

4.3.3.7 $$h^s_{4,p}(\Delta^T_H,\lambda)H_s - T^2\mathcal{L}_Rd^\star_H\alpha^s - T^2(Jd_Hd^\star_HJ)\beta^s - T^2\Delta_H\beta^s = 0.$$

Nous appliquons $h^s_{4,p}(\Delta^T_H,\lambda)$ à (4.3.3.4) et nous tenons compte de (4.3.3.5). Il s'ensuit après calcul que

4.3.3.8 $$h^s_{3,p}(\Delta^T_H,\lambda)\Big[R^s_p(\Delta^T_H,\lambda)\beta^s - T^2(Jd_Hd^\star_HJ)\beta^s\Big] = 0.$$

On conclut par (4.3.3.6) car β^s est un multiple non-nul de β_s ■

Nous allons maintenant étudier la structure de la forme β_s. On a besoin de la définition suivante.

Définition 4.3.3.1
Soient

$$\mathcal{F}^s_{2,p}(\lambda) \text{ et } I^s_{2,p}(\lambda)$$

les espaces qui s'obtiennent des espaces E_1, I_1 introduits par la définition 3.2.2.1 en prenant

$$q = 2(p-s)+1, P = h^s_{1,p}(\cdot,\lambda), \text{ et } b = T^2(c_p+s).$$

Nous avons alors un lemme analogue au lemme 4.3.2.2.

Lemme 4.3.3.2
Supposons que $c_p + s > 0$. Soit $(\alpha,\beta) \in E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{R}^s_{2p+2}$. On a :
(i) β_s appartient à l'espace E qui s'obtient lorsque

$$q = 2(p-s)+1, P = h^s_{1,p}(\cdot,\lambda) \text{ et } b = T^2(c_p+s).$$

(ii) La forme $J\beta_s$ se décompose de manière unique :

4.3.3.9 $$J\beta_s = \beta_s^1 + \beta_s^2 + \beta_s^3$$

avec $\beta_s^1 \in F_{1,p}^s(\lambda), \beta_s^2 \in \mathcal{F}_{2,p}^s(\lambda), \beta_s^3 \in I_{2,p}^s(\lambda)$.

Démonstration :
(i) La forme $J\beta^s$ vérifie les conditions :

(j_1) par $(4.3.3.2)$;
(j_2) par $(4.3.3.3)$;
(j_3) par $(4.3.3.8)$;
(j_4) par la deuxième équation de $(4.3.2.4)$ car $Imd_H^\star \subseteq \mathcal{H}^\perp$.

Par (4.3.2.5) et la deuxième équation de (4.3.2.4) nous avons

$$h_{3,p}^s(\Delta_H^T, \lambda)\partial_H^\star \alpha^s = \tfrac{i}{2T^2} h_{3,p}^s(\Delta_H^T, \lambda)(h_{1,p}^s(\Delta_H^T, \lambda) + i\mathcal{L}_R)\beta^s$$
$$h_{3,p}^s(\Delta_H^T, \lambda)\overline{\partial_H}^\star \alpha^s = -\tfrac{i}{2T^2} h_{3,p}^s(\Delta_H^T, \lambda)(h_{1,p}^s(\Delta_H^T, \lambda) - i\mathcal{L}_R)\beta^s$$

ce qui montre que β_s, donc $J\beta_s$, satisfait (j_4) et (j_5) car

$$h_{3,p}^s(\Delta_H^T, \lambda)\partial_H^\star \alpha^s = \partial_H^\star \left[h_{3,p}^s(\Delta_H^T, \lambda) + i\mathcal{L}_R\right]\alpha^s \in Im\partial_H^\star \subseteq \mathcal{H}_2^\perp$$

et

$$h_{3,p}^s(\Delta_H^T, \lambda)\overline{\partial_H}^\star \alpha^s = \overline{\partial_H}^\star \left[h_{3,p}^s(\Delta_H^T, \lambda) - i\mathcal{L}_R\right]\alpha^s \in Im\overline{\partial_H}^\star \subseteq \mathcal{H}_1^\perp.$$

(ii) On applique la proposition 3.2.2.1 avec $q = 2(p-s)+1$ (on a $q < r$), $P = h_{1,p}^s(\cdot, \lambda)$ et $Q = h_{3,p}^s(\cdot, \lambda)$ ■

Remarque 4.3.3.1
Nous n'avons pas besoin de traiter ici le cas $c_p + s = 0$, car dans cette situation nous avons déjà déterminé l'espace $E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap \mathcal{T}_{2p+2}^s$.

Donnons le résultat, analogue au lemme 4.3.2.3, qui permet de réaliser les espaces qui interviennent dans le lemme précédent comme espaces propres pour $\Delta_{g_T}^{2p+2}$.

Lemme 4.3.3.3
Les applications suivantes sont des injections linéaires.
(i) $g_{1,p}^s : F_{1,p}^s(\lambda) \to E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap Im\ d_{g_T}^\star$ *définie pour* $c_p + s > 0$ *par*

4.3.3.10 $$g_{1,p}^s := \tfrac{1}{c_p+s} d_{g_T}^\star \circ (\tfrac{1}{T^2(s+1)} L^{s+1} h_{4,p}^s(D_H^T, \lambda), L^s(d_H)) \circ G_2$$

où G_2 *est l'opérateur de Green de* $\frac{1}{c_p+2s}\Delta_H^T - h_{4,p}^s(D_H^T, \lambda)$ *agissant sur* $\Lambda^\star(H)$ *;*
(ii) $g_{2,p}^s : \mathcal{F}_{2,p}^s(\lambda) \to E_\lambda(U_{2p+2}^k) \cap Im\ d$ *définie par*

4.3.3.11 $$g_{2,p}^s := (c_p + 2s)\ d \circ (0, (Jd_H J)L^{s-1}) \circ G^{\Delta_H} \text{si } s \geq 1;$$

(iii) $g_{3,p}^s : I_{2,p}^s(\lambda) \to E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cap Im\ d_{g_T}^\star$ *définie par*

4.3.3.12 $$g_{3,p}^s := \tfrac{1}{T^2(s+1)(c_p+s)}\ d_{g_T}^\star \circ (L^{s+1}, 0).$$

Pour $i = \overline{1,3}$ l'image des applications $g^s_{i,p}$ est contenue dans $\mathcal{R}^s_{2p+2}$. Nous avons

$$\Pi^2 \circ g^s_{i,p} = 1_{\mathcal{S}^{2(p-s)+1}}.$$

La démonstration du lemme sera ommise car simple conséquence des lemmes 3.3.3.1, 3.3.4.2 et 3.3.2.1. En nous appuyant sur les lemmes précédents nous pouvons décrire l'espace

$$\left[E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{R}^s_{2p+2}\right] / \left[E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cap \mathcal{T}^{s-1}_{2p+2}\right]$$

à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 4.3.3.1
(i) Lorsque $s(c_p + s) > 0$ nous avons un isomorphisme

4.3.3.13 $$\mathcal{R}^s_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong F^s_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{F}^s_{2,p}(\lambda) \oplus I^s_{2,p}(\lambda) \oplus \left[\mathcal{T}^{s-1}_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})\right].$$

(ii) Pour $c_p + s > 0, s = 0$ nous avons un isomorphisme

4.3.3.14 $$\mathcal{R}^s_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong F^{2p+2}_\lambda(T) \oplus F^0_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{F}^0_{2,p}(\lambda) \oplus I^0_{2,p}(\lambda).$$

Démonstration :
(i) Par les lemmes précédents, l'application qui à

$$\alpha + \beta \wedge \theta \in \mathcal{R}^s_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})$$

associe

$$(g^s_{1,p}\beta_s, g^s_{2,p}(\beta_s), g^s_{3,p}(\beta_s), \alpha + \beta \wedge \theta - g^s_{1,p}(\beta_s) - g^s_{2,p}(\beta_s) - g^s_{3,p}(\beta_s))$$

est un isomorphisme.
(ii) Nous sommes visiblement dans le cas $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$. Si

$$\alpha + \beta \wedge \theta \in \mathcal{R}^0_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})$$

nous avons un isomorphisme

$$\mathcal{R}^0_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong F^0_{1,p}(\lambda) \oplus I^0_{2,p}(\lambda) \oplus \mathcal{Q}_p$$

où, par définition,

$$\mathcal{Q}_p = \{\alpha + \beta \wedge \theta \in \mathcal{R}^0_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) : \beta \in \mathcal{F}^0_{2,p}(\lambda)\}.$$

Bien entendu, l'isomorphisme en cause est défini par

$$\alpha + \beta \wedge \theta \to (g^0_{1,p}(\beta), g^0_{3,p}(\beta), \alpha + \beta \wedge \theta - g^0_{1,p}(\beta) - g^0_{3,p}(\beta)).$$

Il nous reste donc à prouver que

4.3.3.15 $$\mathcal{Q}_p \cong \mathcal{F}^0_{2,p}(\lambda) \oplus F^{2p+2}_\lambda(T).$$

En effet, si $\alpha + \beta \wedge \theta \in \mathcal{Q}_p$ le système (4.3.2.2) devient :

4.3.3.16 $$\begin{cases} \Delta^T_H \alpha - (Jd_H J)\beta = \lambda\alpha \\ c_p\beta + (Jd^\star_H J)\alpha = 0. \end{cases}$$

Rappelons que $\alpha \in \mathcal{S}^{2p+2}$ et $\beta \in \mathcal{S}^{2p+1}$. On considère l'application

$$q : \mathcal{Q}_p \to \mathcal{F}^0_{2,p}(\lambda),\ q(\alpha + \beta \wedge \theta) := d^\star_H \alpha.$$

Nous devons montrer qu'il s'agit d'une application bien définie, calculer son noyau et voir qu'elle est surjective.

• q est bien définie.
C'est une vérification de routine, qui sera omise.

• $Ker\ q \cong F^{2p+2}_\lambda(T)$.
En effet, soit $(\alpha, \beta) \in \mathcal{Q}_p$. Alors $d^\star_H \alpha = 0$. En tenant compte de ce fait, par application de $(J d^\star_H J)$ à la première équation de (4.3.3.16) nous obtenons

$$(\Delta^T_H - \lambda)(J d^\star_H J)\alpha = -\Delta_H \beta$$

car $(d^\star_H J)\beta = 0$. Comme $\beta \in Ker(\Delta^T_H - \lambda)$ par la deuxième équation de (4.3.3.16) nous obtenons $\beta \in \mathcal{H}$ d'où $\beta = 0$ par hypothèse. Il est immédiat de conclure que l'application qui à $\alpha \in F^{2p+2}_\lambda(T)$ associe

$$(\alpha, 0)$$

est un isomorphisme de $Ker(q)$ avec $F^{2p+2}_\lambda(T)$.

• q est surjective.
Soit $u \in \mathcal{F}^0_{2,p}(\lambda)$. Posons $v = G^{\Delta_H} u$. Comme $u \in \mathcal{H}^\perp$ il vient que $\Delta_H v = u$. Définissons

$$(\alpha, \beta) \in \Lambda^{2p+2}(M),\ (\alpha, \beta) := (d_H v, -\mathcal{L}_R v).$$

De toute évidence on a

$$q(\alpha, \beta) = u.$$

Pour démontrer la surjectivité de q il suffit donc de voir que $(\alpha, \beta) \in \mathcal{Q}_p$.

Or $\beta \in \mathcal{F}^0_{2,p}(\lambda)$ car v est un élement de cet espace. Ensuite, (α, β) vérifie la deuxième équation de (4.3.3.16) par (2.2.18) et le fait que $v \in \mathcal{P}^{2p+1}$. Concernant la première nous avons

$$(\Delta^T_H - \lambda)\alpha = d_H(\Delta^T_H - \lambda)v + [\Delta_H, d_H]v = -\mathcal{L}_R(J d_H J)v = (J d_H J)\beta$$

par le fait que $v \in Ker\ h^0_{3,p}(\Delta^T_H, \lambda)$. Ainsi nous avons montré que l'application q est surjective. Ces faits conduisent à l'isomorphisme (4.3.3.15) donc à (4.3.3.14) ■

4.3.4 La démonstration du théorème 4.2.1

Nous allons maintenant assembler les résultats des 2 paragraphes précédents afin de pouvoir donner la démonstration du théorème 4.2.1.

Démonstration du théorème 4.2.1 :
(i) Nous avons $0 \leq [\frac{r}{2}] - 1$, ce qui entraine $c_p > 0$. Par les propositions 4.3.2.1, (i) et (4.3.3.1),

(i) nous avons pour tout $1 \leq s \leq p$ un isomorphisme

$$\mathcal{T}^s_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong \Big[\mathcal{T}^{s-1}_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})\Big] \oplus E^s_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda) \oplus I^s_{1,p}(\lambda) \oplus$$
$$\oplus F^s_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{F}^s_{2,p}(\lambda) \oplus I^s_{2,p}(\lambda).$$

Comme

$$\mathcal{T}^p_{2p+2} = \Lambda^{2p+2}(M)$$

nous obtenons par récurrence

$$E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong \Big[\mathcal{T}^0_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})\Big] \oplus$$
$$\bigoplus_{s=1}^{p+1} \Big[E^s_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda) \oplus I^s_{1,p}(\lambda) \oplus F^s_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{F}^s_{2,p}(\lambda) \oplus I^s_{2,p}(\lambda)\Big].$$

Or par la proposition 4.3.2.1, (i) nous avons

$$\mathcal{T}^0_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong \Big[\mathcal{R}^0_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})\Big] \oplus E^0_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{E}^0_{2,p}(\lambda) \oplus I^0_{1,p}(\lambda)$$

ce qui nous conduit par la proposition 4.3.3.1, (ii) à

$$E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong F^{2p+2}_\lambda(T) \oplus \bigoplus_{s=0}^{p} \Big[E^s_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda) \oplus I^s_{1,p}(\lambda)\Big] \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{s=0}^{p} \Big[F^s_{1,p}(\lambda) \oplus \mathcal{F}^s_{2,p}(\lambda) \oplus I^s_{2,p}(\lambda)\Big].$$

Il est immédiat d'établir que

4.3.4.1
$$\mathcal{E}^s_{2,p}(\lambda) = E^s_{2,p}(\lambda) \oplus \mathfrak{e}^s_{1,p}(\lambda)$$
$$\mathcal{F}^s_{2,p}(\lambda) = F^s_{2,p}(\lambda) \oplus \mathfrak{f}^s_{1,p}(\lambda)$$

Maintenant, par la proposition 3.2.3.1 nous avons des isomorphismes

4.3.4.2
$$I^s_{1,p}(\lambda) = F^{s+1}_{2,p} \oplus \mathfrak{e}^s_{2,p}(\lambda) \oplus \mathfrak{e}^s_{3,p}(\lambda)$$
$$I^s_{2,p}(\lambda) = E^s_{2,p}(\lambda) \oplus \mathfrak{f}^s_{2,p}(\lambda) \oplus \mathfrak{f}^s_{3,p}(\lambda)$$

ce qui achève la preuve de la décomposition (4.2.1). Quant à (4.2.2) et (4.2.3) il suffit de regarder les images des applications de réalisation du lemme 4.3.2.3.
(ii) Dans ce cas nous avons $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$. De nouveau par les propositions 4.3.2.1, (i) et 4.3.3.1, (i) nous avons par récurrence, compte tenu du fait que

$$\mathcal{T}^p_{2p+2} = \Lambda^{2p+2}(M)$$

un isomorphisme

$$E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong \Big[\mathcal{T}^{2p+1-r}_{2p+2} \cap E_\lambda(\Delta^{2p+2}_{g_T})\Big] \oplus$$
$$\bigoplus_{s=2p+2-r}^{p+1} \Big[E^s_{1,p}(\lambda) \oplus E^s_{2,p}(\lambda) \oplus \oplus I^s_{1,p}(\lambda) \oplus F^s_{1,p}(\lambda) \oplus F^s_{2,p}(\lambda) \oplus I^s_{2,p}(\lambda)\Big].$$

En utilisant la proposition 4.3.2.1, (ii) on arrive à

$$E_\lambda(\Delta_{g_T}^{2p+2}) \cong F_\lambda^{2(p-r)-1}(T) \oplus \bigoplus_{s=2p+1-r}^{p} \Big[E_{1,p}^s(\lambda) \oplus E_{2,p}^s(\lambda) \oplus I_{1,p}^s(\lambda)\Big] \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{s=2p+2-r}^{p} \Big[F_{1,p}^s(\lambda) \oplus F_{2,p}^s(\lambda) \oplus I_{2,p}^s(\lambda)\Big].$$

On conclut à l'aide des isomorphismes (4.3.4.1) et (4.3.4.2). L'identification de la partie fermée (resp. cofermée) dans la décomposition 4.2.4 se fait par le lemme 4.3.3.3 et le lemme 4.3.2.4 ■

Chapitre 5

Applications du principe de séparation des variables

Sommaire

5.1 Introduction **85**
5.2 Spectre cohomologique **86**
5.3 Le problème des petites valeurs propres **89**
5.4 Asymptotique du spectre et de la trace du noyau de la chaleur de Δ_{g_T} lorsque $T \to 0$ **93**
5.5 Asymptotique du spectre de Δ_{g_T} lorsque $T \to \infty$ **101**

5.1 Introduction

Ce chapitre contient des applications de nature générale du principe de séparation des variables que nous avons établi au chapitre 4. Nous nous placons dans notre contexte gémétrique habituel, celui de la section 2.2. Les résultats que nous allons établir peuvent être lus (les preuves mises à part) en utilisant seulement les notations introduites aux chapitres précédents.

L'idée générale est que, munis du principe de séparation des variables nous pouvons en principe répondre à toute question qui fait intervenir le comportement en T du spectre des formes de (M, g_T).

Nous commencons par étudier, en 5.2, le spectre cohomologique de (M, g_T). On calcule ce spectre et on positionne certaines valeurs de ce spectre dans le spectre des formes équivariantes de Δ_{g_T}.

Le reste de notre chapitre est consacré à des problèmes d'intérêt général que nous allons préciser et développer dans notre contexte géométrique particulier. Ainsi, en 5.3, nous étudions le problème des petites valeurs propres. On obtient un résultat très précis quant à l'expression de ce valeurs propres et leurs multiplicités. A comparer avec [12] où des estimations asymptotique de ces valeurs propres sont données, dans un cadre plus général.

En 5.4, nous étudions la limite du spectre et de la trace du noyau de la chaleur de Δ_{g_T} lorsque $T \to 0$. On retrouve ainsi des résultats connus. Le résultat nouveau est que nous calculons explicitement, en fonction de la trace du noyau de la chaleur du laplacien de la base, le développement asymptotique de la trace du noyau de la chaleur de Δ_{g_T} (voir le théorème 5.4.2).

Finalement, en 5.5, on regarde la limite du spectre des formes de (M, g_T) quand $T \to \infty$. Nous mettons en évidence la partie convergente de ce spectre, ainsi qu'un phénomène d'effondrement en dimension moitié. On répond également à une question de Berger, pour notre classe de variétés.

5.2 Spectre cohomologique

Nous allons analyser ici le spectre cohomologique du laplacien des formes de (M, g_T). Cet objet a été introduit par la définition 4.2.2. Son importance, comme le montre la définition, est qu'il s'agit d'une partie du spectre qui est produite par les groupes de cohomologie de Dolbeault.

On commence par déterminer explicitement les valeurs propres du spectre cohomologique. Nous allons traiter uniquement le cas des formes de degré pair à cause de la dualité de Hodge. Ensuite, nous allons essayer de déterminer la position de certaines d'entre ces valeurs propres dans le spectre de $\Delta_{g_T}^{2p+2}$.

Nous avons besoin de la définition qui suit.

Définition 5.2.1
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Le spectre cohomologique des $2p+2$-formes k-équivariantes, noté $\mathfrak{h}_k^{2p+2}(T)$ est la partie de $\mathfrak{h}^{2p+2}(T)$ dont les formes propres sont k-équivariantes.

De toute évidence nous avons

$$\mathfrak{h}^{2p+2}(T) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}_k^{2p+2}(T).$$

A cause du fait que la conjugaison complexe réalise un isomorphisme entre $\Lambda_{-k}^{\star}(H)$ et $\Lambda_k^{\star}(H)$ il vient

$$\mathfrak{h}^{2p+2}(T) = \mathfrak{h}_0^{2p+2}(T) + 2\sum_{k \geq 1} \mathfrak{h}_k^{2p+2}(T).$$

Par conséquent il suffit d'étudier les spectres de la forme $\mathfrak{h}_k^{2p+2}(T)$, $k \in \mathbb{N}$.

Pour la description du spectre cohomologique, nous avons besoin d'une autre définition.

Définition 5.2.2
Soit $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ fixé et $k \in \mathbb{N}$. Lorsque $0 \leq m \leq p+1$ on définit :

5.2.1
$$\lambda_m^{p,k} = (k + T^2 \cdot m)(c_p + m - 1 + \tfrac{k}{T^2})$$
$$\mu_m^{p,k} = (k + T^2 \cdot m)(c_p + m + \tfrac{k}{T^2}).$$

Soit $sign$ la fonction de signe. Nous avons :

Proposition 5.2.1
(i) La partie exacte $\mathfrak{f}_k^{2p+2}$ du spectre cohomologique est de la forme :

5.2.2 $$\mu_0^{p,k} < \mu_1^{p,k} < \ldots < \mu_p^{p,k}$$

où les valeurs propres $\mu_m^{p,k}, 0 \leq m \leq p$ *apparaissent avec la multiplicité*

5.2.3 b_{2p+1}^k *si* $m = 0$ *et* $b_{2(p+1-m)}^k + sign(k) b_{2(p-m)+1}^k$ *lorsque* $1 \leq m \leq p$.

(ii) La partie cofermée $\mathfrak{c}_k^{2p+2}(T)$ *du spectre cohomologique est :*

5.2.4 $$\lambda_0^{p,k} < \lambda_1^{p,k} < \ldots < \lambda_{p+1}^{p,k}$$

où les valeurs propres $\lambda_m^{p,k}, 0 \leq m \leq p+1$ *figurent avec la multiplicité*

5.2.5 b_{2p+2}^k *si* $m = 0$ *et* $b_{2(p+1-m)+1}^k + sign(k) \cdot b_{2(p+1-m)}^k$ *lorsque* $1 \leq m \leq p+1$.

Démonstration :
Nous allons prouver uniquement (ii), la preuve de (i) étant de facture analogue. Par la définition du spectre cohomologique, (voir aussi la remarque 4.2.6) nous avons :

$$\mathfrak{c}_k^{2p+2}(T) = \mathfrak{D}_4^{2p+2,k}(T) + \sum_{q=0}^{p} \Big[\mathfrak{h}_{1,p}^{2q+1,k}(T) + \mathfrak{h}_{2,p}^{2q+1,k}(T) + \mathfrak{h}_{3,p}^{2q,k}(T) \Big].$$

Nous tenons compte que le laplacien Δ_H agit sur $\mathcal{H}_{1,k}^q$ par multiplication avec $k(r-q)$. On a alors

$$\mathfrak{D}_4^{2p+2,k}(T) = \{k(c_p - 1) + \frac{k^2}{T^2}\}$$

où le nombre $k(c_p - 1) + \frac{k^2}{T^2}$ se répète avec la multiplicité b_{2p+2}^k. Nous avons aussi pour $0 \leq q \leq p$

$$\mathfrak{D}_1^{2q+1,k}(T) = \{k(r-2q) + \frac{k^2}{T^2}\}$$

où le nombre $k(r-2q) + \frac{k^2}{T^2}$ se répète avec la multiplicité b_{2q+1}^k. Il vient que

5.2.6 $$\mathfrak{h}_{1,p}^{q,k}(T) = \{k(r-2q) + \tfrac{k^2}{T^2} + T^2(p+1-q)(c_p + p - q), 0 \leq q \leq p\}$$

où les nombres ci-dessus figurent chacun avec la multiplicité b_{2q+1}^k. En utilisant le fait que

$$\mathcal{H}_{2,k}^{2q+1} \cap \mathcal{H}_1^{\perp} = 0$$

pour $k \geq 0$ (voir le paragraphe 2.3), il vient que

$$\mathfrak{h}_{2,p}^{2q+1,k}(T) = \emptyset.$$

Quant à $\mathfrak{h}_{3,p}^{2q,k}(T)$, en remarquant que (voir 2.3)

$$(\mathcal{H}_{1,k}^{2q} + \mathcal{H}_{2,k}^{2q}) \cap \mathcal{H}^{\perp} = \begin{cases} 0 \text{ si } k = 0 \\ \mathcal{H}_{1,k}^{2q} \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$$

nous obtenons de la même facon que pour (5.2.6) que

$$\mathfrak{h}_{3,p}^{2q,k}(T) = \{k(r-2q) + \frac{k^2}{T^2} + T^2(p+1-q)(c_p + p - q), 0 \leq q \leq p\}$$

où les nombres ci-dessus figurent chacuns avec la multiplicité $sign(k) \cdot b^k_{2q}$. Il est maintenant facile de conclure ■

Nous allons maintenant positionner certaines valeurs du spectre cohomologique équivariant dans le spectre équivariant de $\Delta^{2p+2}_{g_T}$. A noter que les multiplicités que nous avons données dans la proposition précédente sont à l'intérieur du spectre cohomologique.

La proposition qui suit décrit les deux premières valeurs propres non-nulles du laplacien Δ_{g_T} agissant sur les formes k-équivariantes. Ce que nous allons montrer est que les deux premières valeurs propres non-nulles du laplacien $\Delta^{2p+2}_{g_T}$ agissant sur les formes k-équivariantes sont données (avec multiplicité) par le spectre cohomologique.

Proposition 5.2.2
Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Alors :
(i) La première valeur propre de $\Delta^{2p+2}_{g_T}$ agissant sur $\Lambda^{2p+2}_k(M) \cap Im(d)$ est

$$\mu^{p,k}_1 = \begin{cases} k(c_p + \frac{k}{T^2}) & \textit{de multiplicité } b^k_{2p+1} \quad \textit{si } k \neq 0 \\ T^2(c_p + 1) & \textit{de multiplicité } b^k_{2p} \quad \textit{si } k = 0. \end{cases}$$

(ii) La première valeur propre de $\Delta^{2p+2}_{g_T}$ agissant sur $\Lambda^{2p+2}_k(M) \cap Ker(d^\star_{g_T})$ est

$$\lambda^{p,k}_0 = \ k(c_p - 1 + \tfrac{k}{T^2}) \quad \textit{de multiplicité } b^k_{2p+2} \quad \textit{si } k \neq 0.$$

Démonstration :
Démontrons (ii), la preuve de (i) étant analogue. Par (4.2.17), (voir aussi les notations de la page 80) nous avons que le spectre de Δ_{g_T} agissant sur $Ker(d^\star_{g_T}) \cap \Lambda^{2p+2}_k(M)$ est de la forme

$$\sigma^{2p+2}_{red}(T) + \sum_{q=0}^{p} 2\sigma^{2q}_{3,p}(T) + \sum_{i=1,2\ q=0,p} \sigma^{2q+1}_{i,p}(T) + \mathfrak{c}^{2p+2}(T).$$

Nous allons tenir compte du fait que l'opérateur $\Delta_H - k(r-q)$ est positif sur $\mathcal{S}^q_k, 0 \leq q \leq r$, autrement dit

$$\mu > k(r-q) + \frac{k^2}{T^2},\ \mu \in \sigma^q_{red}(T).$$

En utilisant ceci et la remarque 4.2.5 nous avons, par des considérations élementaires et lorsque $0 \leq q \leq p$:

$$\begin{aligned} &f^{2q}_{3,p}(\mu, T) > \lambda^{p,k}_0, \mu \in \sigma^{2q}_r(T) \\ &f^{2q+1}_{1,p}(\mu, T) > \lambda^{p,k}_0, \mu \in \sigma^{2q+1}_r(T) \\ &f^{2q+1}_{2,p}(\mu, T) > \lambda^{p,k}_0, \mu \in \sigma^{2q+1}_r(T). \end{aligned}$$

On en déduit que la première valeur propre de Δ_{g_T} agissant sur $\Lambda^{2p+2}_k(M) \cap Ker(d^\star_{g_T})$ est la première valeur propre de $\mathfrak{c}^{2p+2}_k(T)$. On conclut par la proposition précédente ■

Remarque 5.2.1
(i) Il n'est pas possible, en toute généralité, de déterminer la position des autres valeurs propres du spectre cohomologique dans le spectre de la restriction $\Delta^{2p+2}_{g_T}$ à $\Lambda^{2p+2}_k(H)$. Néanmoins, nous

verrons que cela est possible lorsque $T \to 0$ (voir le paragraphe 5.3).
(ii) La proposition précédente ne détermine pas la première valeur propre non nulle de $\Delta_{g_T}^{2p+2}$. Voir aussi le paragraphe suivant pour le cas où $T \to 0$.

5.3 Le problème des petites valeurs propres

Par définition les petites valeurs propres du laplacien agissant sur les formes différentielles de (M, g_T) sont les valeurs propres qui convergent vers 0 pour $T \to 0$. On est dans une situation géométrique intéressante, car lorsque $T \to 0$ la famille (M, g_T) s'effondre. Concernant les petites valeurs propres de $(M, g_T))$ (qui se pose d'ailleurs dans un cadre beaucoup plus général), nous avons les questions suivantes.

• déterminer le nombre de petites valeurs propres.

• pour chaque valeur propre petite donner une estimation asymptotique lorque $T \to 0$.

Il s'agit d'une question bien traitée dans la littérature. Dans [16], [17], [36], il a été montré que pour une submersion riemannienne compacte, à fibres totalement géodésiques, munie de la variation canonique $g_T,\ T > 0$, la dimension de l'espace des formes propres de l'ordre de T^2 se calcule à l'aide de la suite spectrale de Leray de la fibration associée.
D'un point de vue plus élémentaire, dans [12], les auteurs répondent à la question sus-citée pour les S^1-fibrés principaux. Le nombre des petites valeurs propres et leur asymptotique est déterminé en appliquant un "lemme de petites valeurs propres" à un espace test construit à partir de la suite de Gysin du fibré (donc constitué de relevés de formes harmoniques de la base). Par conséquent les petites valeurs propres contiennent des informations relatives à la géométrie et la topologie de la variété.

Dans notre contexte géométrique habituel, celui de la section 2.2, cependant moins général que ceux des travaux sus-cités, nous allons présenter la réponse à ces questions. Le fait qu'on contrôle explicitement la variation du spectre des formes de (M, g_T) par rapport à T et par rapport à la distribution horizontale H va faire que ces réponses seront très explicites. Nous allons calculer les petites valeurs propres de (M, g_T) ainsi que leurs multiplicités, qui seront complètement déterminés par la cohomologie de de Rham de M dans la proposition 5.3.1.

Nous avons :

Proposition 5.3.1
Les petites valeurs propres du laplacien des $2p+2$-formes de (M, g_T) sont de la forme suivante lorsque $T \to 0$.
Lorsque $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$:

$$\textbf{5.3.1} \qquad \begin{aligned} &c_pT^2 < (c_p+1)T^2 < 2(c_p+1)T^2 < 2(c_p+2)T^2 < \ldots < (s+1)(c_p+s)T^2 < \\ &< (s+1)(c_p+s+1)T^2 \ldots < (p+1(c_p+p)T^2 < (p+1)(c_p+p+1)T^2 \end{aligned}$$

de multiplicités respectives

$$b_{2p+1}(M), b_{2p}(M), b_{2p-1}(M), b_{2(p-1)}(M), \ldots b_{2(p-s)+1}(M), b_{2(p-s)}(M), \ldots, b_1(M), b_0(M).$$

Lorsque $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$ *:*

5.3.2
$$T^2(2p+2-r) < T^2(2p+3-r) < \ldots < T^2(s+1)(c_p+s) <$$
$$T^2(s+1)(c_p+s+1) < \ldots < T^2(p+1)(c_p+p) < T^2(p+1)(c_p+p+1)$$

de multiplicités respectives

$$b_{2(r-p-1)}(M), b_{2(r-p-1)-1}(M), \ldots, b_{2(p-s)+1}(M), b_{2(p-s)}, \ldots, b_1(M), b_0(M).$$

Remarque 5.3.1
On voit que les valeurs propres qui apparaissent dans l'énoncé de la proposition précédente sont **universelles** *dans la catégorie de variétés que l'on considère. Elles dépendent uniquement de* T*, la longueur de la fibre de* M*, du degré des formes avec lesquelles on travaille et de* r*, qui doit être interprété comme le carré de la norme de la forme de courbure du fibré.*

Pour la démonstration de ce résultat nous aurons besoin d'un lemme technique.

Lemme 5.3.1
Soit $T > 0$ *et* $a, b :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que* $\lim_{T\to 0} a(T) = \lim_{T\to 0} b(T) = 0$*. Alors :*
(i) Si $\alpha \in \mathcal{S}^q$ *est telle que*
$$\Delta_H^T \alpha + a(T) \cdot \alpha = 0$$
nous avons pour T *suffisamment petit* $\alpha \in Ker\Delta_H \cap Ker\mathcal{L}_R$*.*
(ii) Si $\alpha \in \mathcal{S}^q$ *est telle que*
$$(\Delta_H^T)^2\alpha + a(T) \cdot \Delta_H^T \alpha + b(T) \cdot \alpha = 0$$
nous avons lorsque T *est suffisamment petit* $\alpha \in Ker\Delta_H \cap Ker\mathcal{L}_R$*.*

Démonstration :
(i) En utilisant la décomposition de Hodge de l'opérateur Δ_H^T nous avons $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $\alpha_1 \in Ker(\Delta_H^T)$ et $\alpha_2 \in \left[Ker(\Delta_H^T)\right]^\perp$. Comme $Ker(\Delta_H^T) = Ker(\Delta_H) \cap Ker(\mathcal{L}_R)$ il suffit de voir que $\alpha_2 = 0$. Mais α_2 satisfait la même équation que α donc par intégration sur M, nous avons pour $T < 1$:
$$\frac{\int_M < \Delta_H^1 \alpha_2, \alpha_2 > \mu_{g_1}}{\int_M ||\alpha_2||^2 \mu_{g_1}} \leq \frac{\int_M < \Delta_H^T \alpha_2, \alpha_2 > \mu_{g_1}}{\int_M ||\alpha_2||^2 \mu_{g_1}} = -a(T).$$
Supposons maintenant que $\alpha_2 \neq 0$. La forme α_2 étant orthogonale à $Ker(\Delta_H^1)$ le principe du min-max impliquerait que la première valeur propre non-nulle de Δ_H^1 tend vers zéro, absurde.
(ii) Comme en (i) nous décomposons $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, en notant que α_2 satisfait la même équation que α. Il suffit alors de montrer que α_2 a un petit quotient de Rayleigh pour le laplacien Δ_H^1. Nous avons par intégration sur M :
$$\int_M ||\Delta_H^T \alpha_2||^2 \mu_{g_1} \leq |a(T)| \int_M < \Delta_H^T \alpha_2, \alpha_2 > \mu_{g_1} + |b(T)| \int_M ||\alpha_2||^2 \mu_{g_1}.$$
Or, par Cauchy-Schwartz nous avons
$$\int_M ||\alpha_2||^2 \mu_{g_1} \cdot \int_M ||\Delta_H^T \alpha_2||^2 \mu_{g_1} \geq \left(\int_M < \Delta_H^T \alpha_2, \alpha_2 > \mu_{g_1}\right).$$

Posons

$$R_T := \frac{\int_M < \Delta_H^T \alpha_2, \alpha_2 > \mu_{g_1}}{\int_M ||\alpha_2||^2 \mu_{g_1}}.$$

Par ce qui précède on a

$$R_T^2 \leq |a(T)| R_T + |b(T)|$$

donc

$$R_T < \frac{|a(T)|}{2} + \sqrt{|b(T)| + \frac{a^2(T)}{4}}.$$

Comme $R_1 < R_T$ lorsque $T > 1$ nous pouvons conclure ■

Démonstration de la proposition 5.3.1 :
Nous allons traiter uniquement le cas $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}]-1$, l'autre cas étant analogue. Par commodité, posons lorsque $0 \leq s \leq p$:

$$\begin{aligned} \lambda_p^s(T) &:= (s+1)(c_p+s)T^2 \\ \mu_p^s(T) &:= (s+1)(c_p+s+1)T^2. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\lambda(T)$ une petite valeur propre de $\Delta_{g_T}^{2p+2}$. Par le lemme précédent, nous avons que les espaces

$$F_{\lambda(T)}^{2p+2}, E_{1,p}^q(\lambda(T)), E_{2,p}^q(\lambda(T)), \mathfrak{e}_{1,p}^q(\lambda(T)), F_{1,p}^q(\lambda(T)), F_{2,p}^q(\lambda(T)), \mathfrak{f}_{1,p}^q(\lambda(T))$$

sont nuls pour $q = \overline{0,p}$ et T suffisamment petit (les polynômes qui les définissent sont unitaires de degré 1 où 2 et ont des coefficients qui convergent vers 0 lorsque $T \to 0$). Occupons nous de l'espace $\mathfrak{e}_{3,p}^q(\lambda(T))$. Soit α une forme qui y appartient. Nous avons alors

$$h_{2,p}^q(\Delta_H^T, \lambda(T))\alpha - i\mathcal{L}_R\alpha = 0.$$

Mais $\alpha \in \mathcal{H}_2^{2(p-q)}$ donc

$$\Delta_H\alpha - (c_p + 2q + 1)i\mathcal{L}_R\alpha = 0.$$

Nous sommes conduits à

$$(c_p + 2q)\Delta_H\alpha + \frac{c_p + 2q + 1}{T^2}\mathcal{L}_R^\star\mathcal{L}_R\alpha + (T^2(q+1)(c_p+q+1) - \lambda(T))\alpha = 0.$$

Le même raisonnement que celui du lemme 5.3.1, (i) nous mène (car $c_p+2q > 0, c_p+2q+1 > 0$) à $\alpha \in Ker\Delta_H \cap ker\mathcal{L}_R$, d'où $\alpha = 0$ car c'est un élément de $\mathcal{H}_1^\perp$. On conclut que lorsque $0 \leq q \leq p$, nous avons

$$\mathfrak{e}_{3,p}^q(\lambda(T)) = 0.$$

Des considérations analogues nous donnent

$$\mathfrak{f}_{3,p}^q(\lambda(T)) = 0, \mathfrak{e}_{2,p}^q(\lambda(T)) \subseteq \mathcal{H}, \mathfrak{f}_{2,p}^q(\lambda(T)) \subseteq \mathcal{H}$$

pour $q = \overline{0,p}$. Comme

$$\mathfrak{e}_{2,p}^q(\lambda(T)) \cap \mathcal{H} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda(T) \neq \mu_p^q(T) \\ \mathcal{H}^{2(p-s)} & \text{si} \quad \lambda(T) = \mu_p^q(T) \end{cases}$$

et

$$\mathfrak{f}^q_{2,p}(\lambda(T)) \cap \mathcal{H} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda(T) \neq \lambda^q_p(T) \\ \mathcal{H}^{2(p-s)+1} & \text{si} \quad \lambda(T) = \lambda^q_p(T) \end{cases}$$

par ce qui précède et (4.2.1) nous obtenons que $\lambda(T) \in \{\lambda^s_p(T), \mu^s_p(T), s = \overline{0,p}\}$ et

$$E_{\mu^s_p(T)}(\Delta_{g_T}) \cong \mathcal{H}^{2(p-s)},\ E_{\lambda^s_p(T)}(\Delta_{g_T}) \cong \mathcal{H}^{2(p-s)+1}.$$

Nous pouvons maintenant conclure par le corollaire 4.2.3 ■

Par dualité de Hodge, nous pouvons énoncer un résultat analogue à la proposition précédente dans le cas des formes de degré impair.

Remarque 5.3.2
(i) Lorsque $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ *les espaces propres propres correspondant aux valeurs propres*

$$T^2(s+1)(c_p+s), 0 \leq s \leq p$$

sont constitués de formes cofermées (par (4.2.3)) et les espaces propres correspondant aux valeurs propres

$$T^2(s+1)(c_p+s+1), 0 \leq s \leq p$$

sont constitués de formes fermées (par (4.2.2)).
(ii) Supposons que $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$. *Les espaces propres associés aux valeurs propres*

$$T^2(s+1)(c_p+s),\ 2p+2-r \leq s \leq p$$

sont constitués de formes cofermées (par (4.2.6)) tandis que les espaces propres associés aux valeurs propres

$$T^2(s+1)(c_p+s+1),\ 2p+1-r \leq s \leq p$$

sont constitués de formes fermées (par (4.2.5)).
(iii) Lorsque $T > 0$ *est arbitraire, les suites de nombres définies en (5.3.1) et (5.3.2) restent des valeurs propres de* $\Delta^{2p+2}_{g_T}$. *Cependant si* T *n'est pas petit, ce ne sont plus les premières valeurs propres de* $\Delta^{2p+2}_{g_T}$. *On a un contrôle plus faible des multiplicités de ces valeurs propres, à savoir qu'elles sont seulement supérieures où égales aux multiplicités de la proposition 5.3.1. Pour rendre ceci plus clair, mais sans entrer dans les détails, notons qu'un calcul algébrique et des arguments de positivité nous conduit, via le théorème 4.2.1, (sans l'hypothèse d'avoir* T *petit) à :*

$$E_{c_pT^2}(\Delta^{2p+2}_{g_T}) \cong \mathcal{H}^{2p+1} \oplus F^{2p+2}_{T^2c_p} \oplus F^0_{1,p}(T^2c_p) \oplus F^0_{2,p}(T^2c_p) \oplus \mathfrak{f}^0_{1,p}(T^2c_p)$$

lorsque $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$, *avec son analogue dans le cas* $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$.

Remarque 5.3.3
On voit que les estimations asymptotiques de [12] sont des égalités dans notre cas, ce qui ne peut pas arriver sans des hypothèses comme celles que nous avons.

5.4 Asymptotique du spectre et de la trace du noyau de la chaleur de Δ_{g_T} lorsque $T \to 0$

Dans cette section nous allons étudier, à l'aide du théorème 4.2.3, la limite du spectre de Δ_{g_T} lorsque $T \to 0$. On se place dans notre contexte habituel, celui de la section 2.2.

Rappelons que, comme nous l'avons précisé au paragraphe précédent, la famille (M, g_T) s'effondre vers (N, h) lorsque $T \to 0$.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la convergence du spectre de Δ_{g_T} lorsque $T \to 0$ [16], [36] dans diverses situations plus générales que la notre (des fibrés en cercles sans restrictions sur la courbure, au-dessus d'une variété quelconque, etc.) . Le résultat est que les valeurs propres des formes de (M, g_T) convergent pour $T \to 0$ vers celles de (N, h).

Nous allons retrouver facilement ce résultat dans notre cas (voir le théorème 5.4.1). Ensuite, nous allons donner des formules explicites pour l'équivalent asymptotique de la trace du noyau de la chaleur de (M, g_T) lorsque $T \to 0$ (voir le théorème 5.4.2). Comme conséquence, nous obtenons une expression simple pour la limite uniforme de cette trace quand $T \to 0$ (voir corollaire 5.4.1). Ces résultats sont, à notre connaissance, nouveaux.

Définition 5.4.1
Soit $0 \leq q \leq r$. Nous notons :
(i) Σ^q resp. Σ^q_{red} le spectre de Δ_H en restriction à l'espace $\mathcal{P}^q_0$ resp. $\mathcal{P}^q_0 \cap \mathcal{H}^\perp$;
(ii) $\tilde{b}_q(N)$ le q-ième nombre de Betti primitif de N, i.e la dimension de l'espace

$$Harm^q_{prim}(N, h),$$

l'ensemble des q-formes harmoniques et primitives de (N, h).

Avec ces notations nous avons :

Proposition 5.4.1
Soit $p \geq 0$ fixé. Alors :
(i) Le spectre des $2p+2$-formes k-équivariantes, $k \neq 0$, de (M, g_T) converge vers ∞ pour $T \to 0$.
(ii) Le spectre des $2p+2$-formes invariantes de (M, g_T) converge, lorsque $T \to 0$, vers

$$\Sigma^{2p+2} + 3\Sigma^{2p+1}_{red} + 4\sum_{q=0}^{p} \Sigma^q_{red} + \mathcal{C} \tag{5.4.1}$$

où $\mathcal{C}$ désigne la collection $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{2p+1}\}$ avec λ_q de multiplicité $\tilde{b}_q(N)$ et $\lambda_q = 0, q = \overline{0, 2p+1}$.

Démonstration :
Il s'agit de calculer la limite, lorsque $T \to 0$, des fonctions qui apparaissent dans l'enoncé du théorème 4.2.3 ■

A l'aide de la proposition 2.4.1, qui fait le lien entre Σ^q et le spectre des q-formes primitives de N, nous en déduisons le résultat familier suivant.

Théorème 5.4.1
La partie convergente du spectre des $2p+2$-formes de (M, g_T), lorsque $T \to 0$, est donnée par l'union des spectres de $2p+2$ et $2p+1$-formes de (N, h).

Démonstration :
La proposition 2.4.1 entraine que le spectre des q-formes primitives de (N, h) est donné par l'union

$$\Sigma_{red}^{q-2} + 2\Sigma_{red}^{q-1} + \Sigma_{red}^{q} + \{0\}$$

où 0 figure avec la multiplicité $\widetilde{b}_q(N)$. On conclut par (5.4.1), en tenant compte du fait que le spectre des $2p+2$-formes de (N, h) est l'union des spectres des $2q$-formes primitives, $0 \leq q \leq p+1$ et le spectre de $2p+1$-formes de (N, h) est l'union des spectres des $2q+1$-formes primitives, $0 \leq q \leq p$ ■

Nous allons maintenant nous intéresser à la trace du noyau de la chaleur de Δ_{g_T} agissant sur les formes de M lorsque $T \to 0$. Rappelons quelques notions élementaires concernant les équivalences asymptotiques.

Définition 5.4.2
(i) Deux fonctions f, g sont asymptotiquement équivalentes lorsque $T \to 0$ (nous notons $f \cong_{T\to 0} g$) ssi pour tout $n \geq 0$ nous avons :

$$\lim_{T\to 0} \frac{f(T) - g(T)}{T^n} = 0.$$

(ii) Si f est une fonction et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite alors le développment asymptotique de f, lorsque $T \to 0$, est $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ (nous notons $f \cong_{T\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$) ssi pour tout $n \geq 0$ nous avons :

$$\lim_{T\to 0} \frac{f(T) - \sum_{i=0}^{n} a_i T^i}{T^n} = 0.$$

Remarque 5.4.1
(i) Dans la définition précédente, (ii), la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ peut ne pas converger pour aucune valeur de T.
(ii) Deux fonctions asymptotiquement équivalentes ont même développment asymptotique.

Le résultat qu'on recherche dans le reste de ce paragraphe est un développment asymptotique de la trace du noyau de la chaleur du laplacien $\Delta_{g_T}^{2p+2}$ de la forme

$$Tr_M(e^{-t\Delta_{g_T}^{2p+2}}) \cong_{T\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) T^n$$

uniformément en $t > t_0 > 0$, où les fonctions $a_n(t)$ sont à déterminer explicitement en fonction de la trace du noyau de la chaleur du laplacien de la base.

Ce résultat, qui sera établit au théorème 5.4.2, nécéssite quelques préliminaires. Nous allons d'abord nous ramener au cas des formes invariantes par le cercle, à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 5.4.2
Nous avons un équivalent asymptotique :

$$Tr_M(e^{-t\Delta_{g_T}}) \cong_{T\to 0} Tr^0_M(e^{-t\Delta_{g_T}})$$

uniformément en $t > t_0$, où $Tr^0_M(e^{-t\Delta_{g_T}})$ désigne la trace du noyau de la chaleur du laplacien agissant sur les formes invariantes de (M, g_T).

Remarque 5.4.2
(i) Bien qu'il s'agit d'une propriété élementaire, nous n'avons pu la localiser dans la littérature.
(ii) Une fois le résultat de la proposition 5.4.2 démontré, pour obtenir un équivalent asymptotique de $Tr_M(e^{-t\Delta^{2p+2}_{g_T}})$ il suffit de donner un équivalent asymptotique de $Tr^0_M(e^{-t\Delta^{2p+2}_{g_T}})$.

Pour la démonstration de la proposition 5.4.2 nous allons nous servir du théorème 4.2.3. On en déduit que $Tr_M(e^{-t\Delta^{2p+2}_{g_T}})$ est une somme de fonctions de la forme

5.4.2
$$\sum_{\mu\in\sigma^q_{red}(T)} e^{-tf(\mu,T)}$$

où $0 \leq q \leq r$ et $f : [0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}_+$ est parmi les trois types suivants :

5.4.3
$$\begin{aligned}(x,T) &\to x + T^2C\\ (x,T) &\to x + T^2B + T\sqrt{x+T^2A^2}\\ (x,T) &\to x + T^2B - T\sqrt{x+T^2A^2}\end{aligned}$$

avec A, B, C des constantes rélles. Nous avons donc besoin du lemme suivant.

Lemme 5.4.1
Soit $f : [0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction comme on en a considérées en 5.4.3. Si $0 \leq q \leq r$ nous avons :

5.4.4
$$\sum_{\mu\in\sigma^q_{red}(T)} e^{-tf(\mu,T)} \cong_{T\to 0} \sum_{\mu\in\Sigma^q(T),\mu>0} e^{-tf(\mu,T)}.$$

Démonstration :
Posons

$$h(t,T) := \sum_{\mu\in\sigma^q_r(T)} e^{-tf(\mu,T)}.$$

Rappelons que

$$\sigma^q_r(T) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\mu + \frac{k^2}{T^2} : \mu \in \Sigma^{q,k}_r\}$$

où $\Sigma^{q,k}_r$ désigne le spectre de Δ_H en restriction à $\mathcal{P}^q_k \cap \mathcal{H}^\perp_1 \cap \mathcal{H}^\perp_2$. Nous avons alors

$$h(t,T) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k(t,T)$$

où l'on a posé

$$h_k(t,T) = \sum_{\mu \in \Sigma_r^{q,k}} e^{-t\mu}.$$

La fonctions $h_0(t,T)$ ne dépend pas de T ; elle sera notée simplement $h_0(t)$. Ce que nous devons montrer (l'équivalent de (5.4.4)) est que :

$$h(t,T) \cong_{T\to 0} h_0(t).$$

On procède à la preuve de ce fait cas par cas.
Cas 1 $f = x + T^2C$.
Nous pouvons supposer que $C = 0$ et $T < 1$. On a $h_k(t,T) = e^{-tk^2(\frac{1}{T^2}-1)} \cdot h_k(t,1)$ ce qui entraîne que

$$0 < h(t,T) - h_0(t) < 2\phi(t(\frac{1}{T^2}-1))\Big[h(t,1) - h_0(t)\Big]$$

où la fonction ϕ est définie par

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2}.$$

Or il est bien connu que $\lim_{t\to\infty} e^t\phi(t) = 1$ ce qui nous permet de conclure.
Cas 2 $f = x + T^2B + T\sqrt{x + T^2A^2}$.
Nous avons

$$0 < h(t,T) - h_0(t) < e^{-tT^2B}\Big[\sum_{\mu\in\sigma_r^q(T),\mu>0} e^{-t\mu} - \sum_{\mu\in\Sigma^q,\mu>0} e^{-t\mu}\Big]$$

ce qui permet de conclure par le cas précédent. Notons que l'inégalité ci-dessus établit également la convergence de la série $h(t,T)$.
Cas 3 $f = x + T^2B - T\sqrt{x + T^2A^2}$
Nous pouvons supposer que $B = 0$ et $T < 1$. Comme

$$T\sqrt{\mu + \frac{k^2}{T^2} + T^2A^2} = \sqrt{T^2\mu + k^2 + T^4A^2} < \sqrt{\mu + k^2 + A^2}$$

il vient que $h_k(t,T) < e^{-t(\frac{1}{T^2}-1)} \cdot h_k(t,1)$ d'où

$$0 < h(t,T) - h_0(t) < 2\phi(t(\frac{1}{T^2}-1))\Big[h(t,1) - h_0(t)\Big].$$

On conclut comme pour le cas précédent. La convergence de la série $h(t,T)$ se démontre à l'aide des estimations standards sur les valeurs propres d'un opérateur elliptique ■

Remarque 5.4.3
La proposition précédente entraine que

$$Tr_M(e^{-t\Delta_H^T}) \cong_{T\to 0} Tr_{(N,h)}(e^{-t\Delta}).$$

Nous perdons donc toute information concernant le spectre des formes k-équivariantes, $k \neq 0$, lorqu'on considère l'effondrement de (M, g_T) sur (N,h).

Nous pouvons maintenant donner la preuve de la proposition 5.4.2 comme suit.

Démonstration de la proposition 5.4.2 :
C'est une conséquence immédiate du théorème 4.2.3 et du lemme précédent, compte tenu du fait que les fonctions f^s_{iq} sont parmi les trois types qui apparaissent au lemme 5.4.1 ■

Nous allons maintenant expliquer comment obtenir des équivalents asymptotiques à ordre arbitraire pour $Tr^0_M(e^{-t\Delta_{g_T}})$ lorsque $T \to 0$. Tout d'abord, nous allons utiliser le théorème 4.2.3 pour exprimer cette trace à l'aide du spectre du laplacien des formes de (N, h). Il nous faut établir quelques notations.

Définition 5.4.3
(i) Pour $0 \leq q \leq r$ soit

5.4.5
$$\eta_q(t) = \sum_{\mu \in \Sigma^q, \mu > 0} e^{-t\mu}.$$

(ii) Lorsque $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ est une fonction, soit $f(\eta_q)$ la fonction définie par

5.4.6
$$f(\eta_q)(t) = \sum_{\mu \in \Sigma^q,\ \mu > 0} e^{-tf(\mu)}.$$

(iii) Si $f = f(x, T) :]0, \infty[\times]0, \infty[\to]0, \infty[$ est une fonction de deux variables alors $f(\eta_q)$ sera la fonction de deux variables définie par

$$(x, T) \to f(\cdot, T)(\eta_q)(x).$$

Remarque 5.4.4
Pour que la série de (5.4.6) soit convergente il faut imposer des conditions sur la fonction f. Nous allons observer la convergence de la série cas par cas, pour les fonctions qui nous intéresseront par la suite.

Nous avons maintenant, à l'aide de la terminologie introduite ci-dessus et du théorème 4.2.3, une formule pour la trace du laplacien agissant sur les $2p+2$ formes invariantes de $M, 0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$.

5.4.7
$$\begin{aligned} Tr^0_M(e^{-t\Delta_{g_T}}) &= \eta_{2p+2}(t) + \sum_{q=0}^{2p+1} \Big[f^q_{1p}(\eta_q)(t) + f^q_{2q}(\eta_q)(t) \Big] + \\ &+ f^{2p+1}_{4p}(\eta_{2p+1})(t) + 2 \sum_{q=0}^{2p} f^q_{4p}(\eta_q)(t) + \sum_{q=0}^{2p+2} e^{-tT^2(p+1+[\frac{1-q}{2}])(c_p+p-[\frac{q-1}{2}])} \cdot \tilde{b}_q(N). \end{aligned}$$

Pour obtenir un équivalent asymptotique de cette trace il nous faut donner un équivalent asymptotique pour les fonctions du type $f^q_{1,p}(\eta_q) + f^q_{2,p}(\eta_q)$, lorsque $T \to 0$. Ceci sera fait à l'aide du lemme technique suivant.

Lemme 5.4.2
Si $A \in \mathbb{R}$ nous avons un équivalent asymptotique :

5.4.8 $\sum_{\mu\in\Sigma^q,\mu>0} e^{-t\mu}ch(tT\sqrt{\mu+T^2A^2}) \cong_{T\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)T^{2n}$ *uniformément en* $t > t_0 > 0$, *où les fonctions* $f_n(t)$ *sont définies par*

$$f_n(t) = \sum_{2m-j=n,\ 0\leq j\leq m} \frac{(-1)^j C_m^j A^{2(m-j)}}{(2m)!} t^{2m}\eta_q^{(j)}(t).$$

Démonstration :
Posons

$$f(t,T) = \sum_{\mu\in\Sigma^q,\mu>0} e^{-t\mu}ch(tT\sqrt{\mu+T^2A^2}).$$

La série est convergente pour des raisons standards. Soit maintenant $n \geq 0$. Nous avons

$$|ch(tT\sqrt{\mu+T^2A^2}) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(tT)^{2i}}{(2i)!}(\mu+T^2A^2)^i| < \frac{(tT)^{2n+2}}{(2n+2)!}(\mu+T^2A^2)^{n+1}ch(tT\sqrt{\mu+T^2A^2}).$$

Par conséquent,

$$|f(t,T) - \sum_{i=0}^{n} \tfrac{(tT)^{2i}}{(2i)!} \sum_{\mu\in\Sigma^q,\mu>0} e^{-t\mu}(\mu+T^2A^2)^i| <$$
$$< \tfrac{(tT)^{2n+2}}{(2n+2)!} \sum_{\mu\in\Sigma^q,\mu>0} e^{-t\mu}(\mu+T^2A^2)^{n+1}ch(tT\sqrt{\mu+T^2A^2}).$$

Or

$$\sum_{\mu\in\Sigma^q,\mu>0} e^{-t\mu}(\mu+T^2A^2)^i = (-1)^i e^{tT^2A^2}(\eta_q \cdot e^{-tT^2A^2})^{(i)}(t)$$

donc

$$|f(t,T) - e^{tT^2A^2} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \tfrac{(tT)^{2i}}{(2i)!}(\eta_q \cdot e^{-tT^2A^2})^{(i)}(t)| <$$
$$< \tfrac{(tT)^{2n+2}}{(2n+2)!} \sum_{\mu\in\Sigma^q,\mu>0} e^{-t\mu}(\mu+T^2A^2)^{n+1}ch(tT\sqrt{\mu+T^2A^2}).$$

On en tire facilement l'existence du développement asymptotique

$$f(t,T) \cong_{T\to 0} e^{tT^2A^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(tT)^{2n}}{(2n)!}(\eta_q \cdot e^{-tT^2A^2})^{(n)}(t)$$

Maintenant, par la formule de Leibnitz et un calcul direct nous arrivons à la conclusion ■

Nous sommes en position d'énoncer et démontrer le résultat concernant le développement de $Tr_M(e^{-t\Delta_{g_T}})$ lorsque $T \to 0$. Dans le même esprit que celui du principe de séparation des variables, les coefficients de ce développement seront complètement déterminés par la trace du noyau de la chaleur du laplacien de (N,h) agissant sur l'espace $\mathcal{P}$.

Théorème 5.4.2
Nous avons sur les $2p+2$*-formes,* $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ *un équivalent asymptotique :*

5.4.9
$$Tr_M(e^{-t\Delta_{g_T}}) \cong_{T\to 0} \eta_{2p+2}(t) + \eta_{2p+1}(t) + 2\sum_{q=0}^{2p} e^{-tT^2(p-[\frac{q-1}{2}])(c_p+p+[\frac{1-q}{2}])} \cdot \eta_q(t) +$$
$$+2\sum_{q=0}^{2p+1} e^{-tT^2\left[(p-[\frac{q}{2}])(c_p+p-1-[\frac{q-1}{2}])+\frac{r-q}{2}\right]} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^q(t)T^{2n} + \sum_{q=0}^{2p+2} e^{-tT^2(p+1+[\frac{1-q}{2}])(c_p+p-[\frac{q-1}{2}])} \cdot \tilde{b}_q(N)$$

uniformément en $t > t_0 > 0$, où les fonctions f_n^q sont définies par

$$f_n^q(t) = \sum_{2m-j=n,\ 0\le j\le m} \frac{(-1)^j C_m^j}{(2m)!} \cdot (\frac{r-q}{2})^{2(m-j)} t^{2m} \cdot \eta_q^{(j)}(t).$$

Démonstration :
Remarquons que

$$f_{1p}^q(\eta_q)(t) + f_{2p}^q(\eta_q)(t) = 2e^{-tT^2\left[(p-[\frac{q}{2}])(c_p+p-1-[\frac{q-1}{2}])+\frac{r-q}{2}\right]} \cdot \sum_{\mu\in\Sigma^q,\ \mu>0} e^{-t\mu} ch(tT\sqrt{\mu + T^2(\frac{r-q}{2})^2}).$$

On conclut en utilisant le lemme 5.4.1, l'égalité (5.4.7) et le lemme 5.4.2 ■

Regardons de plus près la formule du théorème précédent à l'ordre 0. Nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 5.4.4
Lorsque $0 \le q \le r$ soit θ_q la trace du noyau de la chaleur du laplacien agissant sur les q-formes primitives de N. Nous posons

$$\tilde{\theta}_q := \theta_q - \tilde{b}_q(N).$$

Nous pouvons donner une formule assez simple pour la limite lorsque $T \to 0$ de la trace du noyau de la chaleur du laplacien $\Delta_{g_T}^{2p+2}$.

Corollaire 5.4.1
Nous avons sur les $2p+2$-formes, $0 \le p \le [\frac{r}{2}] - 1$:
(i) Un équivalent asymptotique à l'ordre 0 de $Tr_M(e^{-t\Delta_{g_T}})$, lorsque $T \to 0$, avec :

5.4.10
$$\eta_{2p+2}(t) + (2e^{-t\frac{T^2c_p}{2}} + 1)\eta_{2p+1}(t) +$$
$$+2\sum_{q=0}^{2p}(e^{-tT^2(p-[\frac{q-1}{2}])(c_p+p+[\frac{1-q}{2}])} + e^{-tT^2\left[(p-[\frac{q}{2}])(c_p+p-1-[\frac{q-1}{2}])+\frac{r-q}{2}\right]})\eta_q(t) +$$
$$+\sum_{q=0}^{2p+2} e^{-tT^2(p+1+[\frac{1-q}{2}])(c_p+p-[\frac{q-1}{2}])} \cdot \widetilde{b}_q(N)$$

uniformément en $t > t_0 > 0$.
(ii) Lorsque $t > 0$ est fixé nous avons

5.4.11
$$\lim_{T\to 0} Tr_M(e^{-t\Delta_{g_T}^{2p+2}}) = Tr_N(e^{-t\Delta^{2p+2}}) + Tr_N(e^{-t\Delta^{2p+1}}).$$

Démonstration :
(i) Conséquence directe du théorème précédent.
(ii) Par le point précédent, nous avons

$$\lim_{T\to 0} Tr_M(e^{-t\Delta_{g_T}}) = \lim_{T\to 0} Tr^0_M(e^{-t\Delta_{g_T}}) = \eta_{2p+2}(t) + 3\eta_{2p+1}(t) + 4\sum_{q=0}^{2p}\eta_q(t) + \sum_{q=0}^{2p+2}\tilde{b}_q(N).$$

Maintenant, la proposition 2.4.1 nous donne la relation de récurrence :

5.4.12 $$\eta_{q-2} + 2\eta_{q-1} + \eta_q = \tilde{\theta}_q$$

lorsque $q \geq 2$ et $\eta_1 + 2\eta_0 = \tilde{\theta}_1, \eta_0 = \tilde{\theta}_0$. Un calcul direct montre alors que

$$\eta_{2p+2}(t) + 3\eta_{2p+1}(t) + 4\sum_{q=0}^{2p}\eta_q(t) = \sum_{i=0}^{2p+2}\tilde{\theta}_i.$$

On en déduit sans peine le résultat voulu ■

Remarque 5.4.5
Comme dans la formule de trace (5.4.7), on voit que le spectre cohomologique invariant, qu'il convient d'interpreter ici comme les petites valeurs propres du laplacien Δ_{g_T}, apparait explicitement dans la limite de la trace du noyau de la chaleur.

Le corollaire précédent montre comment on peut obtenir le nombre de petites valeurs propres de (M, g_T) à partir de la trace du noyau de la chaleur du laplacien de (M, g_T).

Nous remarquons que la convergence dans (5.4.11) n'est pas uniforme en t, pour la simple raison qu'une fonction du type $e^{-tT^2C}, C > 0$ n'est pas asymptotiquement équivalente à 1, uniformément en t, lorsque $T \to 0$. Par conséquent (5.4.11) contient encore de l'information quand $t \to \infty$. Nous avons donc :

Corollaire 5.4.2
Le nombre de petites valeurs propres de $\Delta^{2p+2}_{g_T}$ est donné par la valeur de la limite

5.4.13 $$\lim_{t\to\infty}\lim_{T\to 0}\Big[Tr_M(e^{-t\Delta^{2p+2}_{g_T}}) - b_{2p+2}(M)\Big].$$

Remarque 5.4.6
(i) Soulignons encore, en vu du corollaire précédent, que les limites en $t \to \infty$ et $T \to 0$ de la fonction

$$(t, T) \to Tr_M(e^{-t\Delta^{2p+2}_{g_T}})$$

ne commutent pas.
(ii) La formule (5.4.12) nous donne par récurrence :

5.4.14 $$\eta_q = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i(i+1)\tilde{\theta}_{q-i}\ \forall\ q \geq 0.$$

Nous avons donc des formules simples de passage entre les traces du noyau de la chaleur des restrictions du laplacien Δ_H aux espaces $\mathcal{P}^q_0$ et $\mathcal{S}^q_0$. On aurait donc pu exprimer le résultat de (5.4.9) ainsi que celui de (5.4.10) en termes des traces $\tilde{\theta}_q$.

5.5 Asymptotique du spectre de Δ_{g_T} lorsque $T \to \infty$

A l'aide du théorème 4.2.3 nous allons étudier la limite du spectre des formes de (M, g_T) lorsque $T \to \infty$. Tout d'abord, faisons quelques précisions sur la limite de (M, g_T) quand $T \to \infty$.

Soit d_{g_T} la distance associée à la métrique riemannienne g_T. Il a été montré dans [22] que l'espace métrique (M, d_{g_T}) converge au sens de Gromov-Hausdorff, lorsque $T \to \infty$, vers l'espace métrique (M, d_c) où d_c est la distance de Carnot :

$$d_c(x, y) = inf\{L(c) : c(0) = x, c(1) = y, c'(t) \in H\}.$$

Comme la limite de (M, g_T) n'est pas un espace métrique qui provient d'une métrique riemannienne, la limite du spectre des formes de $(M, g_T), T \to \infty$, comportera alors naturellement le spectre des opérateurs différentiels non-riemanniens, associés à la structure sous-riemannienne H. Comme on va le voir dans un instant, il s'agit de l'opérateur Δ_H^T.

Admettons d'abord le fait suivant, conséquence de la hypoellipticité du laplacien horizontal (voir [42]).

Fait :
Le laplacien horizontal Δ_H admet un spectre discret sur tout espace du type $\Lambda^q(H), 0 \leq q \leq r$.

Ceci nous permet d'introduire la définition suivante.

Définition 5.5.1
Lorsque $0 \leq q \leq r$ *soit*

$$\sigma^q$$

le spectre de Δ_H *en restriction à l'espace* $\mathcal{P}^q$. *Le spectre de la restriction de* Δ_H *à l'espace* $\mathcal{P}^q \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp$ *resp. à l'espace* $\mathcal{P}^q \cap \mathcal{H}^\perp$ *sera noté par* σ_{red}^q *resp.* σ_R^q.

Nous pouvons enoncer et démontrer le résultat qui décrit la convergence du spectre de $\Delta_{g_T}^{2p+2}$ quand $T \to \infty$. Par dualité de Hodge nous allons nous restreindre au cas des $2p+2$-formes.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons supposer, par comodité, que $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ et $r = 2n$, les autres cas étant analogues. Notons que le degré moitié s'obtient lorsque $r = 2n$, supposition qui sera faite par la suite.

Proposition 5.5.1
Le spectre des $2p+2$*-formes de* (M, g_T) *se sépare en deux parties.*
(i) Une qui converge vers ∞ *lorsque* $T \to \infty$ *;*
(ii) Une autre qui converge, pour $T \to \infty$, *vers*

5.5.1 $$\sigma^{2p+2} + \sigma_R^{2p+1} + (1 - \tfrac{1}{r-2p})\sigma_{red}^{2p} + (1 - \tfrac{1}{r-2p-1})\sigma_{red}^{2p+1}.$$

Démonstration :
Il s'agit simplement de calculer la limite lorsque $T \to \infty$ des fonctions (définies en 4.2.14) qui aparaissent dans l'expression du spectre de Δ_{g_T} donnée par le théorème 4.2.3 ■

Remarque 5.5.1
Dans la proposition précédente le volume des variétés (M, g_T) tend vers ∞ avec T (car $vol(M, g_T) = T \cdot vol(M, g_1)$). Nous allons voir plus bas, du moins pour la première valeur propre non-nulle, ce qui se passe lorsqu'on renormalise le volume de (M, g_T).

Le cas de la dimension moitié mérite une attention spéciale. Nous allons voir ce que la proposition précédente devient en degré r ce qui nous permettra de mettre en évidence un phénomène général. Posons d'abord :

Définition 5.5.2
Si D est un opérateur différentiel qui admet un spectre discret nous allons noter

$$0 = \lambda_0(D) < \lambda_1(D) \leq \ldots \lambda_n(D) \ldots$$

ce spectre. Chaque valeur propre sera repetée avec sa multiplicité.

Avec ces notations on a :

Proposition 5.5.2
(i) En degré moitié, la partie convergente du spectre de $\Delta^r_{g_T}$ tend lorsque $T \to \infty$ vers

5.5.2 $$0 + \sigma_R^{2p+1} + \tfrac{1}{2}\sigma_{red}^{2p} + 0.$$

Ici, le premier zéro a la même multiplicité que la collection σ et le deuxième a la multiplicité que la collection σ_{red}^{r-1}.
(ii) Le spectre de $\Delta^r_{g_T}$ **s'effondre** *lorsque $T \to \infty$. Plus précisément, nous avons*

$$\lim_{T\to\infty} \lambda_n(\Delta^r_{g_T}) = 0$$

pour tout $n \geq 1$.

Démonstration :
(i) On applique la proposition 5.5.1, (ii) pour $p = n - 1$ et on tient compte du fait que $\mathcal{P}^r = \mathcal{H}^r$ (cf. 2.3.6).
(ii) Il n'est pas difficile de constater que, lorsque λ_n est la n-ième valeur propre de Δ_H en restriction à $\mathcal{P}^{r-1} \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp$, nous avons :

$$\lambda_n(\Delta^r_{g_T}) \leq f^{r-1}_{2,n-1}(\lambda_n, T)$$

ce qui suffit pour conclure. ■

Nous allons nous intéresser maintenant à la limite de la première valeur propre non nulle de $\Delta^{2p+2}_{g_T}$ quand $T \to \infty$. Etant donné que nous controlons explicitement la variation en T du spectre de Δ_{g_T} il nous sera possible de calculer la valeur de cet limite comme on va le voir dans un instant.

Si $0 \leq q \leq r$ soit

$$\lambda_1^{\text{réd}}(\Delta^q_H)$$

la première valeur propre non-nulle de l'opérateur Δ_H agissant sur l'espace $\mathcal{P}^q \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp$.

Proposition 5.5.3
(i) Si $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ nous avons :

$$\lim_{T\to\infty} \lambda_1(\Delta_{g_T}^{2p+2}) =$$
$$= min\{\lambda_1(\Delta_{H|\mathcal{P}^{2p+2}}), \lambda_1(\Delta_{H|\mathcal{P}^{2p+1}}), (1 - \tfrac{1}{r-2p})\lambda_1^{réd}(\Delta_H^{2p}), (1 - \tfrac{1}{r-2p-1})\lambda_1^{réd}(\Delta_H^{2p+1})\}.$$

(ii) En dimension moitié on a :

$$\lim_{T\to\infty} T^2 \cdot \lambda_1(\Delta_{g_T}^r) = min\{k_0^2, \left[\lambda_1^{réd}(\Delta_H^{r-1})\right]^2\}$$

où l'on a posé

$$k_0 = min\{k \geq 1 : b_k^r > 0\}$$

(avec la convention $k_0 = \infty$ si l'ensemble sous le min est vide).

Démonstration :
(i) C'est une conséquence directes de la proposition 5.5.1.
(ii) Rappelons que nous avons supposer que $r = 2n$. Par la proposition 5.5.2, (i), il suffit de s'intérésser aux collections qui tendent vers zéro, pout $T \to \infty$. Ces collections sont $\sigma^r(T)$ et $\sigma_{2,p}^{2p+1}(T)$. Or

$$\sigma^r(T) = \{\frac{k^2}{T^2} : k \in \mathbb{Z}\}$$

et où la valeur propre $\frac{k^2}{T^2}$ figurent avec la multiplicité b_k^r. D'un autre part

$$\lim_{T\to\infty} T^2 \cdot f_{2,p}^{2p+1}(x, T) = x^2$$

pour tout $x \geq 0$. Ces faits nous permettent de conclure aisément ■

Remarque 5.5.2
Dan [43], page 26, M.Rumin montre, lorsque M est une variété de contact arbitraire, la convergence du spectre de Δ_{g_T} (resp. $T^2 \cdot \Delta_{g_T}$ en degré moitié) vers le spectre d'un laplacien de contact Δ_Q resp. Δ_D en degré moitié. Notre proposition précédente peut s'obtenir alors directement de ces résultats, en donnant l'expression des laplaciens Δ_Q et Δ_D dans notre contexte géométrique particulier.

L'intêret du résultat précédent est qu'il donne un exemple de variété munie d'une famille continue de métriques pour laquelle on contrôle bien la première valeur propre non-nulle du laplacien sur les formes.

Contrairement à la première valeur propre du laplacien agissant sur les fonctions, beaucoup moins de choses sont connus quant à la première valeur propre non-nulle du laplacien des formes différentielles. Ainsi, des problèmes aussi simples que la question de Berger :
-etant donnée une variété Z^n, compacte connexe et orientée, est-il possible de trouver une constante universelle $k(Z)$ telle que :

$$\lambda_1(\Delta^p) \leq \frac{k(Z)}{vol(Z, g)^{\frac{2}{n}}}$$

pour toute métrique riemannienne g sur Z (voir [3]) n'ont à ce jour qu'une solution partielle :

-négative pour $p = 0, n \geq 3$, par [13] ; voir aussi [49] et également [8] qui traite une classe particulière de variétés ;
-négative pour $2 \leq p \leq n-2, n \geq 4$, par [21] ;
-affirmative pour $n = 2, p = 0$, par [50] (voir aussi [29] pour le cas de la sphère S^2).

Le cas des 1-formes reste ouvert pour $n \geq 3$.

Il est intéreséssant de noter que si on restreint la question de Berger a des classes de métriques liés au propriétés géométrique particulières de Z on peut obtenir des réponses positives. Citons ainsi les situations suivantes :

-variétés algébriques avec une métrique de Kähler, pour $p = 0$, [10]
-tores plats avec une métrique invariante, [3]
-fibrés de repères d'une surface de Riemann, avec une métrique de type Berger, [20].

Regardons ce que la proposition 5.5.3 apporte de nouveaux par rapport à la question de Berger (on s'intéresse, bien sûr, a notre classe de variétés M). Renormalisons la métrique g_T de facon que le volume soit fini, en posant :

$$\tilde{g}_T := T^{\frac{-2}{2r+1}} \cdot g_T.$$

Donc, $vol(\tilde{g}_T) = vol(g_1) < \infty$. Notons que sur les formes de M on a $\Delta_{\tilde{g}_T} = T^{\frac{2}{2r+1}} \Delta_{g_T}$.

Par la proposition 5.5.3, lorsque $r \geq 2$ et $1 \leq p \leq r-1$ nous avons :

5.5.3 $$\lim_{T \to \infty} \lambda_1(\Delta_{g_T}^{2p+2}) = +\infty.$$

Ceci entraine que la réponse à la question de Berger est **négative** pour la classe de variétés M^{2r+1} dès que $r \geq 2$ et le degré des formes est compris entre 1 et $2r$, à l'exception du degré moitié. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, ce résultat est nouveaux uniquement pour les 1-formes.

Remarque 5.5.3
(5.5.3) est, dans un contexte géométrique un peu plus restrictif, l'analogue pour les formes différentielles du résultat de Bleecker sur les fonctions (voir [8]).

Chapitre 6

Le spectre d'une classe de variétés de Heisenberg

Sommaire

6.1 Rappels géométriques **105**
6.2 Calcul du spectre des variétés $M(r, J, T)$ **107**

6.1 Rappels géométriques

Nous commencons par rappeler brièvement qu'est-ce une variété de Heisenberg. Concernant les rappels nous allons suivre de près Gordon et Wilson [26]. Lorsque $x, y \in \mathbb{R}^n$ soit

6.1.1 $$\gamma(x,y,t) = \begin{bmatrix} 1 & x & t \\ 0 & I_n & y^T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } X(x,y,t) = \begin{bmatrix} 0 & x & t \\ 0 & 0 & y^T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$, que nous allons noter H_{2n+1}, est défini comme étant le sous-groupe de Lie de $GL(n+2, \mathbb{R})$ formé des matrices de la forme $\gamma(x,y,t)$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{h}_n$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n+2, \mathbb{R})$ formée des matrices de la forme $X(x,y,t)$. La base canonique de $\mathfrak{h}_n$ sera

$$\mathcal{B} = \{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, Z\}$$

où $X_i = X(e_i, 0, 0), Y_i = X(0, e_i, 0)$ et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ and $Z = X(0,0,1)$. Soit $\mathfrak{z}_n = \{tZ : t \in \mathbb{R}\}$. Alors $\mathfrak{z}_n$ est a la fois le centre et la sous-algèbre dérivée de $\mathfrak{h}_n$. Par conséquent le groupe de Heisenberg est nilpotent d'ordre 2. Il est bon de noter que nous avons pour les éléments de $\mathcal{B}$

$$[X_i, Y_i] = Z$$

et que tous les autres crochets sont nuls.

Nous allons maintenant nous intéresser aux quotients compacts du groupe H_{2r+1}.

Définition 6.1.1
Lorsque $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{Z})^{+n}$ sont tels que $r_j | r_{j+1}, 1 \leq j \leq n$, soit $r\mathbb{Z}^n$ (respectivement $\frac{1}{r}\mathbb{Z}^n$) l'ensemble des $n-$tuples $x = (x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in r_i\mathbb{Z}$ (respectivement $x_i \in (\frac{1}{r_i}\mathbb{Z})$), $1 \leq i \leq n$. Nous définissons :

$$\Gamma_r = \{\gamma(x, y, t) : x \in r\mathbb{Z}^n, y \in r\mathbb{Z}^n, t \in \mathbb{Z}\}.$$

Nous avons que Γ_r est un sous-groupe discret, cocompact de H_{2n+1}. Posons

$$M(r) := \Gamma_r / H_{2n+1}$$

Pour chaque r comme dans la définition précédente nous introduisons un réseau dans $\mathbb{R}^n$ par

$$\mathcal{L}_r := \{X(x, y, 0) : x \in r\mathbb{Z}^n, y \in r\mathbb{Z}^n\}.$$

Un base dans ce réseau est donnée par

$$\{r_1 X_1, \ldots, r_n X_n, Y_1, \ldots, Y_n\}.$$

Dans ces conditions, une **variété de Heisenberg** sera pour nous une variété riemanniene du type $(M(r), g)$ avec r comme dans la définition précédente et g la projection d'une métrique invariante à gauche sur H_{2n+1}.

Rappelons qu'il suffit de considérer (cf.[26]) les projections des métriques invariantes à gauche de la forme

6.1.2
$$g = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix},$$

où h est une matrice définie positive $2n \times 2n$ et $T > 0$. Désormais, toute métrique g sur une variété $M(r)$ sera considérée de cette forme.

Nous en venons aux propriétés géométriques des variétés $M(r)$. Dans la suite, r tel que dans la définition (6.1.1) sera fixé. Nous allons identifier un élement de $\mathfrak{h}_n$ à un champ invariant à gauche sur H_{2n+1} qui s'identifie à son tour, par projection, à un champ sur $M(r)$. Considérons le tore de dimension $2n$:

$$T(r) := \mathcal{L}_r / \mathbb{R}^{2n}.$$

Nous avons alors une fibration principale en cercles

6.1.3
$$M(r) \xrightarrow{\pi} T(r)$$

Notons que Z est le champ induit par l'action du cercle. Nous allons étudier cette fibration. Munissons $M(r)$ de la métrique $< \cdot, \cdot >$ qui rend les champs de $\mathcal{B}$ orthonormaux. Définissons une 1-forme

$$\theta \in \Lambda^1(M(r)), \theta := < \cdot, Z > .$$

Il s'agit d'une forme de connexion principale dans la fibration (6.1.3) dont courbure est

6.1.4
$$d\theta = -\pi^\star \omega_0$$

où ω_0 est la forme symplectique standard de $\mathbb{R}^{2n}$,

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Nous allons maintenant considérer une classe spéciale de métriques invariantes à gauche sur les variétés $M(r)$. Soit $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ l'ensemble des structures complexes (linéaires) qui sont compatibles avec ω_0 i.e. les structures complexes linéaires J sur $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant

$$\omega_0(Jv, Jw) = \omega_0(v, w)$$

pour tous $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ et

$$\omega_0(v, Jv) > 0$$

pour tous les vecteurs non-nuls $v \in \mathbb{R}^{2n}$.

Par conséquent si $J \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ alors $h_J(v, w) = \omega_0(v, Jw)$ définit un produit scalaire $\mathbb{R}^{2n}$. Nous pouvons maintenant introduire notre classe de variétés par :

Définition 6.1.2
Lorsque $(J, T) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \times]0, \infty[$ soit $M(r, J, T)$ la variété riemannienne

$$(M(r), \begin{bmatrix} h_J & 0 \\ 0 & T^2 \end{bmatrix}).$$

Dans la section suivante, nous allons calculer le spectre de ces variétés.

Remarque 6.1.1
(i) Nous avons

$$d\theta = h_J(\cdot, J\cdot)$$

sur $H = Ker\ \theta$ par (6.1.4).
(ii) $(M(r), \theta)$ est une variété de contact comme en on a considérées dans le chapitre 2. La métrique sur ces variétés est construite à partir de la forme de contact et de la métrique h_J.

6.2 Calcul du spectre des variétés $M(r, J, T)$

Nous sommes dans un contexte géométrique permettant d'appliquer le théorème 4.2.2. Afin de pouvoir calculer le spectre des formes de $M(r, J, T)$, nous avons besoin de calculer le spectre du laplacien Δ_H^T en restriction aux espaces $\mathcal{P}^q, 0 \leq q \leq n$, pour les métriques considérées sur $M(r)$.

Nous allons faire usage dans la suite du spectre des fonctions de $M(r, J, T)$. Ceci a été calculé dans [26] . Rappelons le résultat obtenu.

Proposition 6.2.1
Le spectre du laplacien horizontal Δ_H , agissant sur les fonctions k-équivariantes, $k \geq 0$, de $M(r, J, T)$ est de la forme

$$\textbf{6.2.1} \qquad \begin{array}{ll} h_J(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{Z}^{2r} & si \quad k = 0 \\ kn(2\alpha + 1), \alpha \in \mathbb{Z}_+ avec\ multiplicité\ 2k^n|\Gamma_r| & si \quad k \geq 1 \end{array}$$

où, par définition, $|\Gamma_r| = r_1 \dots r_n$.

Nous allons nous servir de ce résultat pour calculer, dans un premier temps, le spectre de Δ_H^T agissant sur $\mathcal{S}^q, 0 \leq q \leq n$. Définissons les espaces

$$Harm^q_{prim}(T(r), h_J) \text{ et } Harm^{s,t}_{prim}(T(r), h_J)$$

comme étant les espaces de formes harmoniques qui sont primitives de degré q resp. primtives du type (s,t).

Il est évident que l'espace $\mathcal{S}^q, 0 \leq q \leq n$ est engendré par

$$\{f \cdot \pi^\star \phi : f \in C^\infty(M(r)), \phi \in Harm^q_{prim}(T(r), h_J)\}.$$

Nous allons donc calculer l'action de Δ_H sur les formes de ce type, qui se révèle être particulièrement simple, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 6.2.1
Soit $\phi \in Harm^{s,t}_{prim}(T(r), h_J)$. *Alors, si* f *est une fonction* k*-équivariante sur* $M(r)$ *nous avons*

6.2.2 $$\Delta_H(f \cdot \pi^\star \phi) = \Delta_H f \cdot \pi^\star \phi + k(s-t) f \cdot \pi^\star \phi.$$

Démonstration :
C'est une conséquence immédiate de la formule de Bochner pour le laplacien horizontal (voir [45] ou [42]) et du fait que la courbure pseudohermitienne de $M(r, J, T)$ est nulle (le tore de base est plat) ■

Nous allons énoncer maintenant deux faits d'algèbre linéaire. La démonstration se fait aisément par induction et sera ommise.
Faits :
1. $dim_{\mathbb{C}} Harm^{s,t}_{prim}(T(r), h_J) = b^n_{t,s}$ où $b^r_{t,s} = C^t_r \cdot C^s_r - C^{t-1}_r \cdot C^{s-1}_r$.
2. $dim_{\mathbb{C}} Harm^q_{prim}(T(r), h_J) = b^n_q$ où $b^r_q = C^q_{2r} - C^{q-2}_{2r}$.

Remarque 6.2.1
A l'aide de (6.2.2) nous pouvons détérminer les groupes de cohomologie de Dolbeault de $M(r, J, T)$ *comme suit.*

Lorsque $\alpha, t \in \mathbb{N}$ nous définissons

$$\mu(\alpha, t) := (r(2\alpha + 1) + q - 2t).$$

Maintenant, en utilisant (6.2.2) il vient que le spectre de Δ_H agissant sur $\mathcal{S}^q, 0 \leq q \leq r$ est de la forme suivante.

6.2.3
$$\begin{array}{ll} h_J(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{Z}^{2r} \textit{ avec multiplcité } b^r_q & \textit{si} \quad k = 0 \\ k\mu(\alpha, t), \alpha \in \mathbb{N}, t = \overline{0, q} \textit{ avec multiplicité } 2k^n |\Gamma_r| \cdot b_{t,q-t} & \textit{si} \quad k \geq 1. \end{array}$$

Nous en déduisons le résultat suivant.

Proposition 6.2.2
Le spectre de la restriction de Δ_H *a* $\mathcal{P}^q_k, 0 \leq q \leq r$, *est de la forme suivante.*

$h_J(\alpha,\alpha), \alpha \in \mathbb{Z}^{2r}$ *avec multiplicité* b_q^{r-1} *si* $\alpha \neq 0$ *et* b_q^r *si* $k=0$

6.2.4 $k\mu(\alpha,t), k \in \mathbb{N}^\star, \alpha \in \mathbb{N}, t = \overline{0,q}$ *avec multiplicité* $2k^n|\Gamma_r|b_{t,q-t}^{r-1}$ *si* $(q-t)^2+\alpha^2 \neq 0$ *et* $2k^n|\Gamma_r|b_{0,q}^r$ *dans le cas contraire.*

Démonstration :
Il s'agit de se servir de l'isomorphisme (2.4.5) pour déterminer, par récurrence, les multiplicités (pour la restriction de Δ_H à $\mathcal{P}^q$) des valeurs propres données en (6.2.3). ■

Nous n'avons plus qu'à remplacer le spectre donné par (6.2.4) dans les expressions du théorème 4.2.2 pour arriver au résultat suivant.

Théorème 6.2.1
Le spectre des $2p+2$*-formes formes différentielles de* $M(r,J,T)$ *est de la forme suivante.*

$h_J(\alpha,\alpha) + T^2(p-[\frac{q-1}{2}])(r-p-1+[\frac{1-q}{2}])$, *de multiplicité* $2b_q^{r-1}$ *si* $\alpha \neq 0$ *et* b_q^r *si* $\alpha = 0$

$h_J(\alpha,\alpha) + T^2((p-[\frac{q}{2}])(r-p-2-[\frac{q-1}{2}]) + \frac{r-q}{2}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}T^2(r-q)^2 + h_J(\alpha,\alpha)}$, $\alpha \neq 0$ *avec multiplicité* b_q^r

où $q = \overline{0,2p+1}$ *si* $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}]-1$ *et* $q = \overline{0,2(r-p)-1}$ *si* $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$ *;*

$h_J(\alpha,\alpha)$ *de multiplicité* b_{2p+2}^{r-1} *si* $\alpha \neq 0$ *resp* b_{2p+2}^r *si* $\alpha = 0$ *dans le cas* $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}]-1$

$h_J(\alpha,\alpha)$ *de multiplicité* b_{2p+1}^{r-1} *si* $\alpha \neq 0$ *resp* b_{2p+1}^r *si* $\alpha = 0$ *dans le cas* $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$.

Dans la suite le nombre naturel k *va parcourir* $\mathbb{N}^\star$.

$k\mu(\beta,t) + T^2(p-[\frac{q-1}{2}])(r-p-1+[\frac{1-q}{2}]) + \frac{k^2}{T^2}$, *de multiplicité* $4k^r|\Gamma_r|b_{t,q-t}^{r-1}$ *si* $\beta^2+(q-t)^2 \neq 0$ *et* $2k^r b_{0,q}^r|\Gamma_r|$ *dans le cas contraire*;

$k\mu(\beta,t) + T^2((p-[\frac{q}{2}])(r-p-2-[\frac{q-1}{2}]) + \frac{r-q}{2}) \pm \sqrt{k\mu(\beta,t)T^2 + \frac{1}{4}T^4(r-q)^2 + k^2} + \frac{k^2}{T^2}$ *avec* $\beta^2+(q-t)^2 \neq 0$ *et de multiplicité* $2k^r|\Gamma_r|b_{t,q-t}^{r-1}$;

où $t = \overline{0,q}$, $\beta \in \mathbb{N}$ *et* $q = \overline{0,2p+1}$ *si* $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}]-1$ *et* $q = \overline{0,2(r-p)-1}$ *si* $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$ *;*

$k\mu(\beta,t) + \frac{k^2}{T^2}$ *de multiplicité* $b_{t,2p+2-t}^{r-1}$ *si* $\beta^2+(q-t)^2 \neq 0$ *resp* $b_{0,2p+2}^r$ *dans le cas contraire* *si* $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}]-1$

$k\mu(\beta,t) + \frac{k^2}{T^2}$ *de multiplicité* $b_{t,2p+1-t}^{r-1}$ *si* $\beta^2+(q-t)^2 \neq 0$ *resp* $b_{0,2p+1}^r$ *dans le cas contraire* *si* $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$.

Remarque 6.2.2
(i) Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, le théorème précédent a été obtenu pour

les 1*-formes invariantes par le cercle dans l'article [26]. Les auteurs ont utiliser la théorie des representations des groupes de Lie nilpotents.*
(ii) Lorsque $J = J_0$ *et* $T = 1$ *le spectre des formes de la variété* $M(r, T, J)$ *(variété de Heisenberg canonique) a été calculé dans [44]. L'auteur a également utilisé la théorie des representations pour ce calcul.*

Chapitre 7

Le spectre des sphères de Berger

Sommaire

7.1 Le contexte géométrique **111**
7.2 Le spectre des formes équivariantes de la sphère canonique **112**
7.3 Calcul du spectre des variétés (S^{2r+1}, h_T), $T > 0$ **118**

7.1 Le contexte géométrique

Commençons par rappeler la construction des métriques de Berger sur la sphère S^{2r+1}, $r \geq 1$.

Nous considérons le fibré principal en cercles donné par la fibration de Hopf :

$$S^1 \hookrightarrow S^{2r+1} \xrightarrow{\pi} P\mathbb{C}^r .$$

Soit R le champ de vecteurs de la sphère induit par l'action du cercle. Lorsque S^{2r+1} est munie de la métrique de courbure constante 1 soit $\theta \in \Lambda^1(S^{2r+1})$ la forme associée (via la métrique) au champ R. Alors θ est une forme de connexion principale dans la fibration de Hopf, de distribution horizontale H.

Nous équipons $P\mathbb{C}^r$ de la métrique de Fubini-Study que nous allons noter h. Soit J_0 la structure complexe canonique du projectif complexe. Nous avons alors

$$d\theta = -2\pi^\star\omega_0.$$

où $\omega_0 = g(\cdot, J_0)$. Par conséquent, la variété $(P\mathbb{C}^r, g, J)$ avec $g = 2h$ et $J = -J_0$ est une variété de Hodge et θ est une forme de connexion dans la fibration de Hopf de courbure

$$d\theta = \pi^\star\omega$$

où $\omega = g(\cdot, J\cdot)$. Ainsi on est dans une situation géométrique comme celle décrite dans la section 2.2.

Définition 7.1.1
Les métriques de Berger sur la sphère S^{2r+1} sont définies pour $T > 0$ par

7.1.1 $$h_T = \pi^\star h + T^2\theta \otimes \theta.$$

Un point important est que ces métriques sont du type étudié dans la section 2.2 car

7.1.2 $$h_T = \tfrac{1}{2} g_{T\sqrt{2}}.$$

Notons également que pour $T = 1$ nous obtenons la métrique de courbure constante 1.

Nous nous proposons de calculer le spectre des formes différentielles de la famille (S^{2r+1}, h_T) pour tout $T > 0$. De toute évidence, cela revient à calculer le spectre des formes de la famille $(S^{2r+1}, g_{T\sqrt{2}}), T > 0$. Nous allons appliquer notre théorème 4.2.2 pour résoudre ce problème. Il nous faut donc connaitre le spectre du laplacien Δ_H^T en restriction aux espaces $\mathcal{P}^q, 0 \leq q \leq r$ et $T > 0$. Pour le calculer nous allons procéder comme suit.

• Nous allons calculer le spectre des formes équivariantes de (S^{2r+1}, h_1) en adaptant au cas équivariant la méthode qui donne le spectre de la sphère canonique.

• Par le théorème 4.2.2 appliqué à $(S^{2r+1}, g_{\sqrt{2}})$ et le calcul précédent, nous déduisons le spectre de Δ_H agissant sur les formes équivariantes de S^{2r+1} d'où le spectre de Δ_H^T, où $T > 0$ arbitraire.

Ce programme sera réalisé dans la section suivante. Le spectre de (S^{2r+1}, h_T) sera donné dans la section 7.3.

Remarque 7.1.1
Les variétés $(S^{2r+1}, h_T), T > 0$, possédent beaucoup d'isometries. Plus précisément nous pouvons déduire de la proposition B.1 (voir annexe B) que :

7.1.3 $$Isom(S^{2r+1}, h_T) = \begin{cases} SO(2r+2) & si \quad T = 1 \\ U(r+1) & si \quad T \neq 1. \end{cases}$$

Par conséquent, une alternative à la méthode que nous allons présenter serait d'appliquer les méthodes de la théorie de représentations des groupes de Lie compacts pour calculer le spectre de (S^{2r+1}, h_T).

7.2 Le spectre des formes équivariantes de la sphère canonique

Nous allons analyser, dans le cas équivariant, les espaces propres du laplacien des formes de (S^{2r+1}, h_1) tels que décrits dans [35]. Nous allons également donner des preuves géométriques simples concernant les résultats de structure de ces espaces, qui nous permettront de calculer les multiplicités des valeurs propres équivariantes. Notons que même pour le cas de la sphère canonique, ces multiplicités ne sont pas apparentes dans [35] (où le point de vue est basé sur la théorie des représentations), alors que la formule de [19] est erronée. Notons que le spectre des fonctions équivariantes de la sphère standard a été calculé dans [34].

Nous allons maintenant faire quelques préparatifs. Sans spécification contraire, on va travailler avec des formes différentielles à valeurs complexes.

L'espace $\mathbb{R}^{2r+2}$ sera muni de coordonnées $(x_1, \ldots, x_{r+1}, y_1, \ldots, y_{r+1})$. L'action du cercle est alors donnée par

$$(x, y).z = (ax - by, bx + ay), z = a + ib \in S^1, (x, y) \in \mathbb{R}^{2r+2}.$$

Définition 7.2.1
*Soit $0 \leq p \leq 2r+2$ et $m \in \mathbb{N}$. On définit l'espace des p-***formes polynômiales homogènes** *de degré m par*

$$P_m^p = \{\alpha \in \Lambda^p(\mathbb{R}^{2r+2}) : \alpha = \sum_{|I|=p} \alpha_I dx^I, \alpha_I \in P_m\}$$

où P_m est l'espace des polynômes homogènes de degré m, à valeurs complexes, sur $\mathbb{R}^{2r+2}$.

Dans ce qui suit $\mathbb{R}^{2r+2}$ sera muni de sa métrique plate canonique. Soient $d_0^\star, \Delta_0$ la codifférentielle et le laplacien sur les formes qui y sont associés.

Définition 7.2.2
*Soit $0 \leq p \leq 2r+2$ et $m \in \mathbb{N}$. Nous définissons des espaces de p-***formes polynômiales harmoniques** *de degré m comme suit.*

$$H_m^p := Ker\ \Delta_0 \cap Ker\ d_0^\star \cap P_m^p$$
$$'H_m^p := Ker\ d_0 \cap H_m^p,\ ''H_m^p := Ker\ I \cap H_m^p$$

où $I : P_m^p \to P_{m+1}^{p-1}$ désigne le produit intérieur avec le champ :

$$r\frac{d}{dr} := \sum_{i=1}^{r+1} x^i \frac{d}{dx^i} + y^i \frac{d}{dy^i}.$$

Remarque 7.2.1
(i) On a $'H_m^0 = 0$ si $m \geq 1$, $''H_m^0 = H_m^0$ pour $m \geq 0$.
(ii) Nous avons

7.2.1 $$H_m^p = {}'H_m^p \oplus {}''H_m^p \text{ si } p \geq 1.$$

Ceci est une conséquence directe de la formule

7.2.2 $$\{d_0, I\} = (m+p)1_{P_m^p}$$

(voir [35], page 535). Par la même formule et le fait que $P_0^p \subseteq Ker(d_0)$ nous obtenons :

7.2.3 $$''H_0^p = 0 \text{ si } 1 \leq p \leq 2r+2.$$

Nous allons maintenant donner quelques propriétés des espaces de formes polynômiales homogènes harmoniques en restriction à la sphère S^{2r+1}.

Définition 7.2.3
Soit $i : S^{2r+1} \to \mathbb{R}^{2r+2}$ l'inclusion. Lorsque $m \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 2r+1$ nous définissons des espaces de p-formes de S^{2r+1} par :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_m^p &:= i^\star(H_m^p), \\ {}'\tilde{H}_m^p &:= i^\star({}'H_m^p), \\ {}''\tilde{H}_m^p &:= i^\star({}''H_m^p). \end{aligned}$$

Nous avons alors les faits suivants (voir [35], page 536) :

Fait 1
L'application

$$i^\star : H^p_m \to \tilde{H}^p_m \text{ est injective.}$$

Fait 2
Nous avons une décomposition en somme directe orthogonale

7.2.4 $$L^2(\Lambda^p(S^{2r+1})) = \bigoplus_{m\geq 0} \tilde{H}^p_m.$$

Par conséquent, les espaces $\tilde{H}^p_m$ sont les candidats naturels pour les espaces propres du laplacien des p-formes de (S^{2r+1}, h_1). Nous allons maintenant voir ce qu'il en est, en calculant l'action de Δ sur ces espaces. Il nous faut donc comparer les laplaciens de la sphère et de $\mathbb{R}^{2r+2}$. Ceci a été fait dans [19], en utilisant l'expression locale du laplacien des formes d'une variété riemannienne donnée par la connexion de Levi-Civita. Nous allons procéder de manière beaucoup plus simple et qui nous servira par la suite.

Désignons par $\star$ resp. $\star_0$ les opérateurs de Hodge de (S^{2r+1}, h_1) resp. $(\mathbb{R}^{2r+2}, can)$.

Lemme 7.2.1
Soit $\alpha \in \Lambda^p(\mathbb{R}^{2r+2})$ avec $0 \leq p \leq 2r+2$. Alors

7.2.5 $$\star\,(i^\star\alpha) = (-1)^{p+1} i^\star\Big[I(\star_0\alpha)\Big].$$

Démonstration :
Il s'agit d'un exercice d'algèbre linéaire élémentaire. Rappelons d'abord le fait immédiat (voir aussi [35], page 534) :

7.2.6 $$I \circ \star_0 = (-1)^p \star_0 \circ E$$

sur $\Lambda^p(\mathbb{R}^{2p+2})$, où $E : \Lambda^\star(\mathbb{R}^{2r+2}) \to \Lambda^\star(\mathbb{R}^{2r+2})$ est l'opérateur défini par

$$E := r\,dr \wedge \cdot.$$

Soit maintenant $x \in S^{2r+1}$ fixé. La forme α_x s'écrit de manière unique comme

$$\alpha_x = \beta_x + E(\gamma_x)$$

avec $\beta_x \in \Lambda(\mathbb{R}^{2r+2})_x,\ I(\beta_x) = 0$ et $\gamma_x \in \Lambda^{p-1}(\mathbb{R}^{2r+2})_x,\ I(\gamma_x) = 0$.
Nous allons vérifier la formule (7.2.5) au point x, pour la forme $E(\gamma_x)$. Tout d'abord,

$$i^\star(E\beta_x) = i^\star(r\,dr)_x \wedge i^\star\beta_x = 0$$

car $i^\star(r\,dr) = \frac{1}{2} i^\star dr^2 = 0$. De l'autre côté, par (7.2.6), on a

$$I(\star_0 E\gamma_x) = (-1)^{p-1} I^2(\star_0\gamma_x) = 0.$$

Il nous reste à vérifier notre formule pour la forme β_x. Soit $\{e_1, \ldots, e_{2r+1}\}$ une base orthonormée, positive, dans T_xS^{2r+1}. Comme $I\beta_x = 0$ nous avons

$$\beta_x = \sum_{I=(1\leq i_1<\ldots<i_p\leq 2r+1)} \beta^I_x \cdot e^I.$$

Alors

$$\star\beta_x = \sum_{I=(1\leq i_1<\ldots<i_p\leq 2r+1)} \varepsilon(I,J)\beta_x^I \cdot e^J$$

où pour $I = (1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq 2r+1))$, on a noté $J = (1 \leq j_1 \ldots < j_{2r+1-p} \leq 2r+1)$ la suite croissante complémentaire et $\varepsilon(I,J)$ la signature de la permutation $(i_1,\ldots,j_p,j_1,\ldots,j_{2r+1-p})$.

Comme $\{e_1,\ldots,e_{2r+1},(\frac{d}{dr})_x\}$ est une base orthonormée, positive, dans $T_x\mathbb{R}^{2r+2}$ nous obtenons

$$\star_0\beta_x = \sum_{I=(1\leq i_1<\ldots<i_p\leq 2r+1)} \varepsilon(I,J)\beta_x^I \cdot e^J \wedge (rdr)_x.$$

Or I est une antidérivation et $I(rdr)_x = 1$, donc :

$$I(e^J \wedge rdr_x) = I(e^J) \wedge (rdr)_x + (-1)^{2r+1-p}e^J.$$

On conclut par le fait que $i^\star(rdr)_x = 0$ ■

Posons $T_0 := \sqrt{2}$. On est conduit à :

Proposition 7.2.1
(i) Le spectre du laplacien des p-formes exactes de (S^{2r+1}, g_{T_0}), où $1 \leq p \leq 2r$, est de la forme

7.2.7 $\lambda_m^p = \frac{1}{2}(m+p)(2r+2+m-p), m \geq 0$ *avec espace propre* $'\widetilde{H}_m^p$.

(ii) Le spectre des p-formes cofermées, $1 \leq p \leq 2r$ est :

7.2.8 $\mu_m^p = \frac{1}{2}(m+p)(m+2r-p), m \geq 1$ *avec espace propre* $''\widetilde{H}_m^p$.

Démonstration :
Rappelons d'abord le fait que sur une variété riemannienne compacte, connexe et orientée (Z^n, g) nous avons :

7.2.9 $$d^\star = (-1)^{pn+n+1} \star d\star$$

sur $\Lambda^p(Z)$. On a également sur les p-formes de Z :

7.2.10 $$\star^2 = (-1)^{p(n-1)}.$$

Nous allons montrer maintenant que pour toute forme $\alpha \in H_m^p,\ m \geq 0$, nous avons :

7.2.11 $$d^\star(i^\star\alpha) = (m+2r+2-p)i^\star(I\alpha).$$

En effet, si α est une telle forme nous avons par (7.2.9) et (7.2.5) :

$$d^\star(i^\star\alpha) = (-1)^{p(2r+1)+2r+2} \star d\Big[\star(i^\star\alpha)\Big] = -(\star i^\star)\Big[(d_0 I) \star_0 \alpha\Big].$$

Comme $\star_0\alpha \in P_m^{2r+2-p}$ nous obtenons par (7.2.2) que $(d_0 I)\star_0\alpha + I d_0 \star_0)\alpha = (m+2r+2-p)\star_0$. Or $d_0^\star\alpha = 0$ donc $d_0 \star_0 \alpha = 0$ ce qui nous conduit à

$$d^\star(i^\star\alpha) = -(m+2r+2-p) \star \Big[i^\star(\star_0\alpha)\Big] = (-1)^p(m+2r+2-p)i^\star I(\star_0^2\alpha)$$

par (7.2.5). On conclut par (7.2.10).

Il suffit maintenant de calculer le spectre des p-formes de (S^{2r+1}, h_1). Notre résultat découle de la renormalisation (7.1.2).

Soit $m \geq 0$. Nous allons calculer l'action de Δ sur les espaces $'\tilde{H}^p_m$ et $''\tilde{H}^p_m$. Il est évident que

$$'\tilde{H}^p_m \subseteq Ker\ d.$$

Par (7.2.11) il vient que

$$''\tilde{H}^p_m \subseteq Ker\ d^\star.$$

Soit $\alpha \in {}'H^p_m$. Alors, par (7.2.11) :

$$\Delta(i^\star\alpha) = d\Big[d^\star(i^\star\alpha)\Big] = (m+2r+2-p)di^\star I\alpha = (m+2r+2-p)i^\star(d_0 I)\alpha.$$

En utilisant (7.2.2) il vient que

7.2.12 *Δ agit sur $'\tilde{H}^p_m$ par multiplication avec $(m+p)(m+2r+2-p)$.*

On en déduit

$$'\tilde{H}^p_m \subseteq Im\ d, \text{ pour tout } m \geq 0.$$

Soit maintenant $\alpha \in {}''H^p_m$. Nous avons

$$\Delta(i^\star\alpha) = d^\star d(i^\star\alpha) = (d^\star i^\star)d_0\alpha = (m+2r-p)i^\star(Id_0\alpha)$$

par (7.2.11) et le fait que $d_0\alpha \in H^{p+1}_{m-1}$. On conclut par (7.2.2) que :

7.2.13 *Δ agit sur $''\tilde{H}^p_m$ par multiplication avec $(m+p)(m+2r-p)$.*

Maintenant, en tenant compte de (7.2.1) et (7.2.3), la décomposition (7.2.4) entraine

7.2.14 $$L^2(\Lambda^p(S^{2r+1}) \cap Im\ d) = \bigoplus_{m\geq 0} {}'\tilde{H}^p_m$$

et

7.2.15 $$L^2(\Lambda^p(S^{2r+1}) \cap Im\ d^\star) = \bigoplus_{m\geq 1} {}''\tilde{H}^p_m$$

ce qui achève notre preuve ■

Remarque 7.2.2
(i) On aurait pu obtenir (7.2.8) de (7.2.7) par dualité de Hodge.
(ii) On voit maintenant pourquoi la formule pour la multiplicité des valeurs propres λ^p_m est érronée dans [19].

Nous nous tournons maintenant vers le cas équivariant. Lorsque $k \in \mathbb{Z}$ nous avons des espaces de formes polynomiales k-équivariantes notés P^k_m, $P^{p,k}_m$, $H^{p,k}_m$, $\tilde{H}^{p,k}_m$, etc, définis de manière évidente.

En utilisant la décomposition en somme directe orthogonale

$$L^2(\Lambda^p(S^{2r+1}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Lambda^p_k(S^{2r+1}),$$

(7.2.4) nous fournit une décomposition en somme directe orthogonale

7.2.16
$$\Lambda_k^p(S^{2r+1}) = \bigoplus_{m\geq 0} \tilde{H}_m^{p,k}.$$

Nous devons donc étudier les espaces $H_m^{p,k}$. Rappelons d'abord le résultat suivant concernant les espaces H_m^k.

Lemme 7.2.2 *(voir [34], page 204)*
Soit $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. L'espace P_m^k est non réduit à zéro ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$m = 2n + |k|.$$

Dans ce cas nous avons
$$d_n^k := dim_{\mathbb{C}} P_m^k = C_{n+r}^r C_{n+r+|k|}^r$$
$$D_n^k := dim_{\mathbb{C}} H_m^k = d_n^k - d_{n-1}^k.$$

Nous allons étendre ce résultat aux p-formes comme suit.

Lemme 7.2.3
Soit $0 \leq p \leq r, m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors $P_m^{p,k} \neq (0)$ ssi

7.2.17
$$m = 2n + k - p, n \in \mathbb{N} \text{ si } k \geq p+1$$
$$m = 2n, n \in \mathbb{N} \text{ si } k \leq p, p-k \in 2\mathbb{N}$$
$$m = 2n+1, n \in \mathbb{N} \text{ si } k \leq p, p-k \in 2\mathbb{N}+1$$

Dans ce cas nous avons

$$d_m^{p,k} := dim_{\mathbb{C}} P_m^{p,k} = \sum_{t+s=p} C_{r+1}^t C_{r+1}^s d_m^{k+t-s}.$$

Démonstration :
Soit $1 \leq j \leq r+1$. Nous définissons les 1-formes

$$dz_j := dx_j + idy_j$$
$$d\overline{z}_j := dx_j - idy_j.$$

Nous avons alors $dz_j \in \Lambda_{-1}^1(\mathbb{R}^{2r+2})$ et $d\overline{z}_j \in \Lambda_1^1(\mathbb{R}^{2r+2})$. Soit maintenant $\alpha \in P_m^{p,k}$. Nous décomposons

$$\alpha = \sum_{t+s=p} \alpha_{t,s}$$

avec $\alpha_{t,s} \in \Lambda_k^{t,s}(\mathbb{R}^{2r+2}) \cap P_m^{p,k}$ (la bigraduation complexe de $\mathbb{R}^{2r+2}$ est par rapport à sa structure complexe canonique J_0). Or,

$$\alpha_{t,s} = \sum_{I,J\in\mathbb{N}^{r+1},|I|=t,|J|=s} f_{IJ}^{t,s} \cdot dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

avec $f_{IJ}^{t,s} \in P_m$. Il est immédiat de vérifier que, en fait, $f_{IJ}^{t,s} \in P_m^{(k-p)+2t}$. Par le lemme 7.2.2, m doit être de la forme

$$m = 2n + |k - p + 2t|, n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit facilement (7.2.17). Concernant la dimension de notre espace, nous venons de montrer que

$$dim_{\mathbb{C}} P_m^{p,k} = \sum_{s+t=p} C_{r+1}^s C_{r+1}^t dim_{\mathbb{C}} P_m^{(k-p)+2s}.$$

On conclut par le lemme 7.2.2 ■

A partir de ce dernier résultat et de la proposition 7.2.1 nous avons :

Proposition 7.2.2
Soit $1 \leq p \leq r$. Le spectre des p-formes k-équivariantes, cofermées, de (S^{2r+1}, g_{T_0}) est de la forme

7.2.18 $\frac{1}{2}(m+p)(m+2r-p)$, *avec espace propre* $''\tilde{H}_m^{p,k}$

où m est de la forme suivante :

$$\begin{array}{lll} m = 2n + k - p, n \geq 0 & si & k \geq p+1 \\ m = 2n, n \geq 1 & si & k \leq p, p-k \in 2\mathbb{N} \\ m = 2n+1, n \geq 0 & si & k < p, p-k \in 2\mathbb{N}+1. \end{array}$$

Il nous reste donc à calculer la multiplicité de ces valeurs propres. Ceci sera fait dans l'annexe A, car c'est un fait qui est plus lié à la particularité de la situation géométrique qu'à notre théorie. Posons seulement pour $m, k \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq r$:

$$'D_m^{p,k} := dim_{\mathbb{C}} {}'H_m^{p,k}$$
$$''D_m^{p,k} := dim_{\mathbb{C}} {}''H_m^{p,k}.$$

7.3 Calcul du spectre des variétés (S^{2r+1}, h_T), $T > 0$

A partir du spectre du laplacien $\Delta_{g_{T_0}}$ agissant sur les formes k- équivariantes de S^{2r+1} nous allons déduire, à l'aide du théorème 4.2.1 le spectre du laplacien horizontal Δ_H. Ensuite, le théorème 4.2.2 nous donnera le spectre des formes de (S^{2r+1}, h_T) pour tout $T > 0$.

Nous avons :

Lemme 7.3.1
Les valeurs propres $\mu_n^{q,k}$ de l'opérateur Δ_H agissant sur l'espace $\mathcal{P}_k^q, 0 \leq q \leq r, k \in \mathbb{N}$ sont de la forme suivante :

7.3.1
$$\begin{array}{ccc} (2n+r-q)k + 2n(n+r-q), n \geq 0 & si & k \geq q+1 \\ 2n(n+r) + qr - \frac{1}{2}(q^2+k^2), n \geq 1 & si & k \leq q, q-k \in 2\mathbb{N} \\ 2n(n+r+1) + r(q+1) - \frac{1}{2}(q^2-k^2-1), n \geq 0 & si & k \leq q, q-k \in 2\mathbb{N}+1. \end{array}$$

Démonstration :
Soit λ une valeur propre de Δ_H en restriction a $\mathcal{P}_k^q$. Alors, $\lambda + \frac{k^2}{2}$ est une valeur propre k-équivariante de $\Delta_H^{T_0}$, donc de $\Delta_{g_{T_0}}^q$ car, par le théorème (4.2.1), nous avons

$$F^q_{\lambda+\frac{k^2}{2}}(T_0) \subseteq E_{\lambda+\frac{k^2}{2}}(\Delta^q_{g_{T_0}}) \cap Kerd^\star_{g_{T_0}}.$$

Alors, par (7.2.18), λ doit être de la forme μ_n^q ■

Il nous reste à déterminer les multiplicités de ces valeurs propres. Posons

$$M_n^{q,k} := dim_{\mathbb{C}} F_n^{q,k}$$

où, pour alléger la notation, on a défini :

$$F_n^{q,k} = Ker(\Delta_H - \mu_n^{q,k}) \cap \mathcal{P}^{q,k}.$$

Nous allons définir également lorsque $0 \leq q \leq r$:

$$F_r^q(\lambda) := \mathcal{P}^q \cap \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp \cap Ker(\Delta_H^{T_0} - \lambda).$$

On va donner une relation de récurrence qui permetttra (cf. annexe A) de calculer $M_n^{q,k}$. Nous avons avons besoin d'un lemme préparatoire.

Lemme 7.3.2
Soit $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ *fixé. Lorsque* $T = T_0$ *nous avons pour tout* $m \geq 0$ *et* $0 \leq s \leq p$ *:*

$$\begin{aligned}
E^s_{1,p}(\lambda_m^{2p+2}) &= F_r^{2(p-s)}(\mu_m^{2(p-s)}) \oplus F_r^{2(p-s)}(\mu_{m+2}^{2(p-s)}) \\
F^s_{2,p}(\lambda_m^{2p+2}) &= F_r^{2(p-s)+1}(\mu_{m+1}^{2(p-s)+1}) \\
E^s_{2,p}(\mu_m^{2p+2}) &= F_r^{2(p-s)}(\mu_m^{2(p-s)}) \\
F^s_{1,p}(\mu_m^{2p+2}) &= F_r^{2(p-s)+1}(\mu_{m-1}^{2(p-s)+1}) \oplus F_r^{2(p-s)+1}(\mu_{m+1}^{2(p-s)+1}).
\end{aligned}$$

Démonstration :
Il s'agit d'un calcul algébrique immédiat ■

Proposition 7.3.1
Soit $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ *et* $k \in \mathbb{N}$. *Nous avons les relations de récurrence :*

7.3.2
$$M_n^{2p+1,k} + M_n^{2p+2,k} + M_{n-1}^{2p,k} + M_{n-1}^{2p+1,k} = {}''D_m^{2p+2,k} - {}''D_{m-2}^{2p,k}$$

et

7.3.3
$$M_n^{2p,k} + M_n^{2p+1,k} + M_{n-1}^{2p-1,k} + M_{n-1}^{2p,k} = {}'D_m^{2p+2,k} - {}'D_{m-2}^{2p,k}$$

où

$$m = \begin{cases} 2n + k - (2p+2) & si \quad k \geq 2p+3 \\ 2n & si \quad k \leq 2p+2, 2p+2-k \in 2\mathbb{N} \\ 2n+1 & si \quad k < 2p+2, 2p+2-k \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

Démonstration :
Posons maintenant

$$F_r^{q,k}(\lambda) := F_r^{q,k}(\lambda) \cap \Lambda^{p,k}(H).$$

Le cas $k \geq 2p+3$:
Nous avons alors pour $m = 2n+k-q$

$$F_r^{q,k}(\mu_m^{q,k}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n=0 \\ F_n^{q,k} & \text{si} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Ceci à cause du fait que l' espace $\mathcal{H}_{1,k}^q$ produit la valeur propre $k(r-q)+\frac{k^2}{2}$ pour $\Delta_H^{T_0}$, qui n'est égale à $\mu_n^{q,k}$ que lorsque $n=0$.

Notons que par la positivité de k nous avons

$$\mathcal{H}_2^{q,k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q \leq r \\ \mathcal{H}^{r,k} & \text{si} \quad q = r. \end{cases}$$

Compte tenu de ce fait nous obtenons par calcul :

$$\mathfrak{e}_1^{p,s}(\mu_n^{2p+2,k}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq s+1 \\ \mathcal{H}_1^{2(p-s)} & \text{si} \quad n = s+1. \end{cases}$$

$$\mathfrak{f}_2^{p,s}(\mu_n^{2p+2,k}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq s+1 \\ \mathcal{H}_1^{2(p-s)+1} & \text{si} \quad n = s+1. \end{cases}$$

$$\mathfrak{f}_3^{p,s}(\mu_n^{2p+2,k}) = 0$$

Par conséquent, le théorème (4.2.1) (voir 4.2.3) nous donne, lorsque $n \geq p+2$:

$$E_{\mu_n^{2p+2,k}}(\Delta_{g_{T_0}}) \cap Kerd^\star_{g_{T_0}} \cong F_n^{2p+2,k} \oplus \bigoplus_{s=0}^{p} (F_{n-s-1}^{2(p-s),k})^2 \oplus F_{n-s-1}^{2(p-s)+1,k} \oplus F_{n-s}^{2(p-s)+1,k}.$$

Ceci entraine

$$''D_m^{2p+2,k} = M_n^{2p+2,k} + \sum_{s=0}^{p} 2M_{n-s-1}^{2(p-s),k} + M_{n-s-1}^{2(p-s)+1,k} + M_{n-s}^{2(p-s)+1,k}.$$

Il est immédiat d'en tirer que

7.3.4 $$M_{n-1}^{2p,k} + M_{n-1}^{2p+1,k} + M_n^{2p+1,k} + M_n^{2p+2,k} = ''D_m^{2p+2,k} - ''D_{m-2}^{2p,k}.$$

Lorsque $0 \leq n \leq p+1$ nous avons :

$$E_{\mu_n^{2p+2,k}}(\Delta_{g_{T_0}}) \cap Kerd^\star_{g_{T_0}} \cong F_n^{2p+2,k} \oplus F_0^{2(p-n+1),k} \oplus F_0^{2(p-n+1),k} \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{s=0}^{p} (F_{n-s-1}^{2(p-s),k})^2 \oplus F_{n-s-1}^{2(p-s)+1,k} \oplus F_{n-s}^{2(p-s)+1,k}.$$

et on voit facilement que nous avons une relation de récurrence du même type que (7.3.3). Maintenant, un calcul algébrique nous donne lorsque $m = 2n + k - (2p + 2)$:

$$\mathfrak{e}_{2,p}^{s,k}(\lambda_m^{2p+2}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq s+1 \\ \mathcal{H}_1^{2(p-s)} & \text{si} \quad n = s+1 \end{cases}$$

$$\mathfrak{e}_{3,p}^{s,k}(\lambda_m^{2p+2}) = 0$$

$$\mathfrak{f}_{1,p}^{s,k}(\lambda_m^{2p+2}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq s \\ \mathcal{H}_1^{2(p-s)+1} & \text{si} \quad n = s. \end{cases}$$

Donc par le théoréme (4.2.1) il vient que lorsque $n \geq p + 2$ nous avons

$$E_{\lambda_m^{2p+2}}(\Delta_{g_{T_0}}^{2p+2,k}) \cap Ker\ d \cong F_n^{2p+1,k} \oplus \bigoplus_{s=0}^{p} \Big[F_{n-s-1}^{2(p-s),k} \oplus F_{n-s}^{2(p-s),k} \Big] \oplus \bigoplus_{s=1}^{p} (F_{n-s}^{2(p-s)+1,k})^2.$$

On en tire donc que

$$'D_m^{2p+2,k} = M_n^{2p+1,k} + \sum_{s=0}^{p} (M_{n-s-1}^{2(p-s),k} + M_{n-s}^{2(p-s),k}) + 2 \sum_{s=1}^{p} M_{n-s}^{2(p-s)+1,k}.$$

Nous en déduisons la relation :

7.3.5 $$M_n^{2p+1,k} + M_{n-1}^{2p-1,k} + M_{n-1}^{2p,k} + M_n^{2p,k} = 'D_m^{2p+2,k} - 'D_{m-2}^{2p,k}.$$

Lorsque $0 \leq n \leq p + 1$ nous avons :

$$E_{\lambda_m^{2p+2}}(\Delta_{g_{T_0}}^{2p+2,k}) \cap Ker\ d \cong F_n^{2p+1,k} \oplus F_0^{2(p-n+1),k} \oplus F_0^{2(p-n+1)+1,k} \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{s=0}^{p} \Big[F_{n-s-1}^{2(p-s),k} \oplus F_{n-s}^{2(p-s),k} \Big] \oplus \bigoplus_{s=1}^{p} (F_{n-s}^{2(p-s)+1,k})^2.$$

On en tire une relation de relation de récurrence analogue à (7.3.5).
Le cas $k \leq 2p + 2$.
Se traite de manière analogue au cas précédent ■

Remarque 7.3.1
(i) Au cours de la preuve de la proposition précédente on a établi que $\mathcal{H}_1^{p,k} = 0$ *si* $0 \leq k \leq p$. *Ceci est en concordance avec les théorèmes d'annulation de [45].*
(ii) Nous allons montrer dans l'annexe A comment on peut calculer les multiplicités $M_n^{q,k}$, $0 \leq q \leq r$, *à partir de la dimension des espaces de formes polynomiales harmoniques et homogènes.*

Compte tenu de la renormalisation (7.1.2) nous obtenons par le théorème 4.2.2 le spectre des formes de (S^{2r+1}, h_T).

Théorème 7.3.1
Le spectre des $2p + 2$*-formes* k*-équivariantes de* $(S^{2r+1}, h_T), T > 0$ *est de la forme suivante.*

- $\mu_n^{q,k} + \frac{k^2}{T^2} + T^2\Big[(p - [\frac{q}{2}])(c_p + p - 1 - [\frac{q-1}{2}]) + \frac{r-q}{2}\Big] \pm T\sqrt{\mu_n^{q,k} + \frac{k^2}{T^2} + \frac{(r-q)^2}{4}},\ n \geq 1$
  de multiplicité $M_n^{q,k}$, *où* $0 \leq q \leq 2p+1$ *si* $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ *et* $0 \leq q \leq 2(r-p) - 2$ *si* $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$.
- $\mu_n^{q,k} + \frac{k^2}{T^2} + T^2(p - [\frac{q-1}{2}])(c_p + p + [\frac{1-q}{2}]), n \geq 1$
  où $0 \leq q \leq 2p+1$ *si* $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ *resp.* $0 \leq q \leq 2(r-p) - 2$ *si* $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$,
  de multiplicité $2M_n^{q,k}$ *si* $0 \leq q \leq 2p$ *resp.* $0 \leq q \leq 2(r-p) - 3$ *et* $M_n^{2p+1,k}$ *si* $q = 2p+1$ *resp.* $q = 2(r-p) - 2$.
- $\mu_n^{2p+2,k} + \frac{k^2}{T^2},\ n \geq 0$ *de multiplicité* $M_n^{2p+2,k}$, *lorsque* $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$.
- $\mu_n^{2(r-p)-1,k} + \frac{k^2}{T^2},\ n \geq 0$ *de multiplicité* $M_n^{2(r-p)-1,k}$, *lorsque* $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$.
- $k(r-q+1) + \frac{k^2}{T^2} + T^2(p+1+[\frac{1-q}{2}])(c_p + p - [\frac{q-1}{2}])$,
  où $0 \leq q \leq 2p+1$ *si* $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ *resp.* $0 \leq q \leq 2(r-p) - 2$ *si* $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$,
  de multiplicité $M_0^{q,k}$.
- $k(r-q) + \frac{k^2}{T^2} + T^2(p - [\frac{q-1}{2}])(c_p + p + [\frac{1-q}{2}]), k \neq 0$
  où $0 \leq q \leq 2p+1$ *si* $0 \leq p \leq [\frac{r}{2}] - 1$ *resp.* $0 \leq q \leq 2(r-p) - 2$ *si* $[\frac{r}{2}] \leq p \leq r-1$,
  de multiplicité $M_0^{q,k}$.

Remarque 7.3.2
(i) Nous avons obtenu tout le spectre des formes de (S^{2r+1}, h_T) *à cause du fait que la conjugaison complexe réalise un isomorphisme*

$$\Lambda_k^\star(S^{2r+1}) \to \Lambda_{-k}^\star(S^{2r+1})$$

qui commute avec le laplacien.
(ii) Le cas des $2p+1$*-formes est également résolu par la dualité de Hodge.*

Annexe A

La multiplicité du spectre équivariant de (S^{2r+1}, h_1)

Nous allons travailler dans cette section avec les objets définis au chapitre 6. Notre objectif est de calculer la dimension des espaces

$$'H_m^{p,k}, ''H_m^{p,k}$$

où $m, k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p \leq r$.

Rappelons quelques faits utiles. Tout d'abord, comme nous allons travailler dans le cadre équivariant il est important de noter que la forme rdr est invariante par l'action du cercle.Ensuite nous avons sur P_m^p :

A. 1 $$\{d_0^\star, E\} = -(2r + 2 - p + m)1_{P_m^p}$$

(voir [35], page 535).

Nous commencons par démontrer le lemme

Lemme A. 1
Lorsque $0 \leq p \leq 2r, m \geq 0$ *on a une suite exacte :*

A. 2 $$0 \to P_m^{p,k} \cap Ker d_0^\star \hookrightarrow P_m^{p,k} \xrightarrow{d_0^\star} P_{m-1}^{p-1,k} \cap Ker d_0^\star \to 0.$$

Démonstration :
Il suffit de montrer que $d_0^\star : P_m^{p,k} \to P_{m-1}^{p-1,k}$ est surjective. Soit $\alpha \in P_{m-1}^{p-1,k} \cap Ker\ d_0^\star$. Alors $E(\alpha) \in P_m^p$ et $d_0^\star(E\alpha) = -(2r + 2 - p + m)\alpha$ par (A.1) et le fait que $d_0^\star \alpha = 0$ ■

Corollaire A. 1
Nous avons

$$dim_{\mathbb{C}}(P_m^{p,k} \cap Ker d_0^\star) + dim_{\mathbb{C}}(P_{m-1}^{p-1,k} \cap Ker d_0^\star) = dim_{\mathbb{C}} P_m^{p,k}$$

Démonstration :
Est immédiate ■

Remarque A. 1
La même preuve que celle 6.3.3 nous donne une suite exacte

A. 3 $$0 \to P_m^p \cap Ker d_0^\star \hookrightarrow P_m^p \xrightarrow{d_0^\star} P_{m-1}^{p-1} \cap Ker d_0^\star \to 0.$$

Ceci entraine, comme pour le corollaire A.1 que lorsque $1 \leq p \leq 2r+1$ *nous avons*

A. 4 $$dim_{\mathbb{C}}(P_m^p \cap Ker d_0^\star) = C_{2r+1}^p \cdot C_{m+2r+2-p}^{2r+1}.$$

Définition A. 1
Définissons deux opérateurs $D_1, D_2 : \Lambda^\star(\mathbb{R}^{2r+2}) \to \Lambda^\star(\mathbb{R}^{2r+2})$ *par*

$$D_1\alpha = d_0^\star(r^2 \cdot E\alpha),\ D_2\alpha = r^2 \cdot \alpha,\ \alpha \in \Lambda^\star(\mathbb{R}^{2r+2}).$$

Nous auront besoin de quelques faits concernant ces opérateurs qu'on enumère ci-dessous. Aucune preuve ne sera donnée car il s'agit de calculs immédiats.

Lorsque $j \geq 1$ nous avons :

A. 5 $$D_1^j('H_m^{q,k}) \subseteq P_{m+2j}^{q,k} \cap Ker\ d_0^\star$$

A. 6 $$\Delta_0\left[D_1^j\alpha\right] = -4j(m+j+r)D_1^{j-1}\alpha,\ \alpha \in {}''H_m^{q,k}.$$

A. 7 $$D_2^j({}''H_m^{q,k}) \subseteq P_{m+2j}^{q,k} \cap Ker\ d_0^\star$$

A. 8 $$\Delta_0(D_2^j\alpha) = 4j(r+1+j+m)(2r-q+m+2j)D_2^{j-1}\alpha,\ \alpha \in {}'H_m^{q,k}.$$

On a alors

Proposition A. 1
Nous avons des décompositions en somme directe

A. 9 $$P_{2m}^{p,k} \cap Ker d_0^\star = \bigoplus_{j=0}^{m} D_1^{m-j}('H_{2j}^{p,k}) \oplus D_2^{m-j}({}''H_{2j}^{p,k})$$

et

A. 10 $$P_{2m+1}^{p,k} \cap Ker d_0^\star = \bigoplus_{j=0}^{m} D_1^{m-j}('H_{2j+1}^{p,k}) \oplus D_2^{m-j}({}''H_{2j+1}^{p,k})$$

Démonstration :
Nous allons procéder par récurrence sur m. On démontre seulement (A.5), l'autre assertion étant analogue. Supposons donc que

$$P_{2(m-1)}^{p,k} = \sum_{j=0}^{m-1} D_1^{m-1-j}('H_{2j}^{p,k}) \oplus D_2^{m-j-1}({}''H_{2j}^{p,k}).$$

Nous avons que la somme

A. 11 $$\sum_{j=0}^{m} D_1^{m-j}('H_{2j}^{p,k}) + D_2^{m-j}(''H_{2j}^{p,k})$$

est contenue dans $P_{2m}^{q,k} \cap Ker\ d_0^\star$ par (A.4) et (A.5). Montrons maintenant que la somme de (A.11) est directe. Supposons que

$$\sum_{j=0}^{m} D_1^{m-j}(u_j) + D_2^{m-j}(v_j) = 0$$

où $u_j \in 'H_{2j}^{p,k}$ et $v_j \in ''H_{2j}^{p,k}$. Par application de Δ_0 il vient, compte tenu de (A.6) et (A.8) que

$$\sum_{j=0}^{m-1}(m-j)(r+1+m+j)(2r+2m-p)D_1^{m-1-j}(u_j) - (m-j)(r+2m+j)D_2^{m-1-j}(v_j) = 0.$$

Comme par notre hypothèse de récurrence la somme

$$\sum_{j=0}^{m-1} D_1^{m-1-j}{}'H_{2j}^{p,k} + D_2''H_{2j}^{p,k}$$

est directe, nous obtenons que $D_1^{m-1-j}(u_j) = 0$ et $D_2^{m-1-j}(v_j) = 0$ pour $0 \leq j \leq m-1$. Il est immédiat de conclure que $v_j = 0, j = \overline{0, m-1}$. En appliquant Δ_0 à $D_1^{m-1-j}(u_j) = 0$ on trouve par (A.5) que $D_1^{m-2-j}(u_j) = 0$. Ensuite, par récurrence, on trouve que $u_j = 0, j = \overline{0, m-1}$. Nous avons aussi $u_m = 0, v_m = 0$ car les espaces $'H_{2m}^{p,k}, ''H_{2m}^{p,k}$ sont en somme directe pour $m \geq 1$. Nous avons fini de démontrer que la somme de (A.11) est directe.
Maintenant, comme l'application

$$\Delta_0 : P_{2m}^{p,k} \to P_{2(m-1)}^{p,k}$$

a comme noyau l'espace $H_m^{p,k}$ nous obtenons par notre hypothèse de récurrence que

$$dim_{\mathbb{C}}(P_{2m}^{p,k} \cap Ker\ d_0^\star) \leq \sum_{j=0}^{m} dim_{\mathbb{C}} H_{2j}^p.$$

Or nous avons vu que l'espace

$$\bigoplus_{j=0}^{m} D_1^{m-j}('H_{2j}^{p,k}) \oplus D_2^{m-j}(''H_{2j}^{p,k}),$$

de dimension $\sum_{j=0}^{m} dim_{\mathbb{C}} H_{2j}^p$, est contenu dans $P_{2m}^{p,k} \cap Ker\ d_0^\star$, ce qui achève notre démonstration ■

Remarque A. 2
(i) Dans le cas de l'espace P_n les décompositions précédentes figurent dans [4], page 160.

Notre preuve est plus simple.
(ii) Dans [35], page 535, il a été démontré par des méthodes algébriques que

$$P^p_m = H^p_m \oplus (r^2 P^p_{m-2} + E(P^{p-1}_{m-1})).$$

Ceci ne permet pas de donner directement une formule pour la dimension des espaces H^p_m.
(iii) Une preuve formellement identique à celle de la proposition 6.3.2 nous permet d'établir l'existence des décompositions

A. 12 $$P^p_{2m} \cap Ker d^\star_0 = \bigoplus_{j=0}^{m} D_1^{m-j}('H^p_{2j}) \oplus D_2^{m-p}(''H^p_{2j})$$

et

A. 13 $$P^p_{2m+1} \cap Ker d^\star_0 = \bigoplus_{j=0}^{m} D_1^{m-j}('H^p_{2j+1}) \oplus D_2^{m-p}(''H^p_{2j+1})$$

Corollaire A. 2
(i) Nous avons :

A. 14 $$dim_{\mathbb{C}} H^{2p,k}_m = dim_{\mathbb{C}}(H^k_{m-2p}) + dim_{\mathbb{C}} P^{2p,k}_m + 2\Big[\sum_{j=1}^{2p-1}(-1)^j dim_{\mathbb{C}} P^{2p-j,k}_{m-j}\Big] + dim_{\mathbb{C}} P^k_{m-2p}.$$

et

A. 15 $$\begin{aligned} dim_{\mathbb{C}} H^{2p+1,k}_m &= -dim_{\mathbb{C}} H^k_{m-2p-1} + dim_{\mathbb{C}} P^{2p+1,k}_m + \\ &+2\Big[\sum_{j=1}^{2p}(-1)^j dim_{\mathbb{C}} P^{2p+1-j,k}_{m-j}\Big] - dim_{\mathbb{C}} P^k_{m-2p-1}. \end{aligned}$$

(ii)

A. 16 $$dim_{\mathbb{C}}{}'' H^{p,k}_m = dim_{\mathbb{C}}{}' H^{p+1,k}_{m-1}.$$

(iii)

A. 17 $$dim_{\mathbb{C}}{}' H^{p,k}_m = (-1)^p + \sum_{q=1}^{p}(-1)^{q+1} dim_{\mathbb{C}} H^{p-q}_{m+q}.$$

Démonstration :
(i) Par (A.5) et (A.6) nous avons

$$dim_{\mathbb{C}} H^{p,k}_m = dim_{\mathbb{C}}(P^{p,k}_m) - dim_{\mathbb{C}}(P^{p,k}_{m-2} \cap Ker d^\star_0).$$

Maintenant, la relation du corollaire A.1 nous donne par récurrence le résultat voulu.
(ii) Nous allons montrer que pour $m \geq 1$ on a un isomorphisme

$$I : {}'H^{p,k}_m \to {}''H^{p-1,k}_{m+1}.$$

Tout d'abord, I est bien définie, car si $\alpha \in {}'H^{p,k}_m$ nous avons $I\alpha \in P^{p-1}_{m+1} \cap Ker I$ et $I\alpha \in Ker\ d^\star_0$ par la formule

A. 18 $$\{d^\star_0, I\} = 0 \ sur\ \Lambda^\star(\mathbb{R}^{2r+2})$$

(voir [35], page 534). Ensuite, I est injective, car $'H_m^{p,k}$ et $''H_m^{p,k}$ sont en somme directe (cf. (6.2.1)) . Montrons que I est surjective. Soit $\alpha \in {}''H_{m+1}^{p-1,k}$. Alors $d_0\alpha \in {}'H_m^p$ et $I(d\alpha) = (m+p)\alpha$ par (6.2.2). Par conséquent I est un isomorphisme.
(iii) S'obtient par récurrence, à partir de (ii) et du fait que

$$dim_{\mathbb{C}}{}'H_m^{p,k} + dim_{\mathbb{C}}{}''H_m^{p,k} = dim_{\mathbb{C}}H_m^{p,k}$$

lorsque $m \geq 1$. ■

Annexe B

Sur la géométrie des variétés (M, g_T)

Dans le contexte de la section 2.2 on étudie la "taille" du groupe des isométries de la famille (M, g_T), pour tout $T > 0$. Notre motivation pour étudier ce problème est de pouvoir dire sous quelles hypothèses les méthodes de l'analyse harmonique s'appliquent pour le calcul du spectre des formes de (M, g_T). Nous savons d'avance que ce n'est généralement pas le cas, car ces l'application de ces méthodes est conditionné par l'existence de groupes d'isométries suffisamment larges. D'un autre coté, nous allons voir que des sous-groupes de cohomologie de Dolbeault produisent des isométries, donc des objets géométriques. Notons que nous savons déjà que ces groupes produisent des valeurs propres privilégiés pour le laplacien des formes, donc des objets analytiques.

Pour avoir la dimension (donc la "taille") du groupe des isométries de (M, g_T) il suffit de s'intéresser à son algèbre de Lie, l'algèbre des champs de Killing. C'est ce que allons faire par la suite.

Bien que les résultats qui suivent soient de nature élémentaires nous n'avons pas pu les localiser dans la littérature.

Soit $\iota(M, g_T)$ l'algèbre des champs de Killing de (M, g_T)

$$\iota(M, g_T) = \{\alpha \in \Lambda^1(M, \mathbb{R}) : \nabla^T_X \alpha(Y) + \nabla^T_Y \alpha(X) = 0 \; \forall \; X, Y \in \chi(M)\}$$

et soit $\iota_{\mathbb{C}}(M, g_T)$ son complexifié (∇^T désigne la connexion de Levi-Civita de (M, g_T)). Pour $k \in \mathbb{Z}$ on définit

$$\iota^k_{\mathbb{C}}(M, g_T) = \Lambda^{1,k}(M) \cap \iota_{\mathbb{C}}(M, g_T).$$

Bien évidemment

$$\iota_{\mathbb{C}}(M, g_T) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \iota^k_{\mathbb{C}}(M, g_T).$$

Rappelons quelques propriétés de ∇^T. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de (N, h). Si $X \in \chi(N)$ soit $X^\star \in \chi(M)$ le relevé horizontal de X par rapport à la forme de connexion θ.

B. 1 $$\nabla^T_{X^\star} Y^\star = (\nabla_X Y)^\star - \tfrac{1}{2}\omega(X, Y)\pi \cdot R, X, Y \in \chi(N)$$

et

B. 2 $$\nabla^T_R = \tfrac{T^2}{2}\mathcal{J} + \mathcal{L}_R \; sur \; \Lambda^\star(H).$$

Si X est un champ de vecteurs de M nous allons désigner par X^H sa partie horizontale.

Définition B. 1
La courbure pseudohermitienne de M est le $(4,0)$-tenseur qui agit sur des champs horizontaux X, Y, Z, T par

$$R^H(X,Y,Z,T) = g_H(\nabla^H_Y \nabla^H_X Z, T) - g_H(\nabla^H_X \nabla^H_Y Z, T) + g_H(\nabla^H_{[X,Y]^H} Z, T)$$

Remarque B. 1
Nous pouvons définir, en analogie avec le cas riemannien le tenseur de Ricci pseudohermitien Ric^H . Nous avons alors

$$Ric^H(X^\star, Y^\star) = Ric_h(X,Y) \circ \pi, \forall\, X, Y \in \chi(N).$$

Les identités (B.1) nous conduisent, après calcul, aux relations suivantes concernant le tenseur de Ricci de g_T.

B. 3
$$\begin{aligned} &Ric_{g_T} = Ric^H - \tfrac{T^2}{2} g_H \text{ sur } \chi(H) \\ &Ric_{g_T}(R,R) = \tfrac{rT^4}{2} \\ &Ric_{g_T}(R,X) = 0, \forall\, X \in \ \chi(H). \end{aligned}$$

Les premières propriétés d'un champ de Killing équivariant sont données par le

Lemme B. 1
Supposons $k \neq 0$ et soit $\alpha \in \iota^k_{\mathbb{C}}(M, g_T)$. Alors :
(i) $\alpha \in \Lambda^{1,k}(H)$; (ii) $J\alpha = -\frac{ik}{T^2}\alpha$.

Démonstration :
(i) Comme α est une forme de Killing, on a $\nabla^T_R \alpha(R) = 0$ ce qui entraine (car $\nabla^T_R R = 0$) que $R.\alpha(R) = 0$. Il vient que α est horizontale.
(ii) α étant une forme de Killing, nous avons

$$\nabla^T_R \alpha(X^\star) + \nabla^T_{X^\star} \alpha(R) = 0 \;\forall\, X \in \chi(N).$$

Comme α est horizontale, il vient que $\nabla^T_{X^\star}\alpha(R) = -\alpha(\nabla^T_{X^\star} R) = -\alpha(\nabla^T_R X^\star) = \frac{T^2}{2} J\alpha(X^\star)$ par (B.2). Toujours par (B.2) nous avons que $\nabla^T_R \alpha = \frac{T^2}{2} J\alpha + ik\alpha$ ce qui permet de conclure ■

Par conséquent, nous devons avoir :

B. 4 $$\iota^k_{\mathbb{C}}(M, g_T) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^\star \text{ lorsque } T \in]0, \infty[\setminus \{\sqrt{k}, k \in \mathbb{N}^\star\}.$$

Nous allons étudier maintenant les cas restants. Faisons quelques rappels. D'abord, nous avons une formule de Weitzenböck pour le laplacien horizontal, qu'on rappelle pour les 1-formes, seul cas qui nous intéresse ici.

B. 5 $$\Delta_H = \nabla^{H\star}\nabla^H + Ric^H - \mathcal{L}_R J \text{ sur } \Lambda^1(H).$$

(voir [45]). Ensuite, nous avons une formule de Bochner pseudohermitienne (voir également [45]) :

B. 6 $$D'^{\star}D' = \frac{1}{2}\Big[(\nabla^H)^{\star}\nabla^H + iRic^H J + ir\mathcal{L}_R\Big] \text{ sur } \Lambda^1(H)$$

où

$$D' : \Lambda^{\star}(H) \to \Gamma(TH \otimes \Omega^{\star}(H))$$

est l'opérateur défini par

$$D'_v := \frac{1}{2}(\nabla^H_v - i\nabla^H_{Jv}), v \in H.$$

Corollaire B. 1
Nous avons pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

B. 7 $$\mathcal{H}^{0,1}_k = Ker(D').$$

Démonstration :
Par (B.5) et (B.6) on obtient sur $\Lambda^{0,1}_k(H)$:

$$(D')^{\star}D' = \Delta_{\overline{\partial_H}}$$

ce qui entraine aussitôt la conclusion ■

Remarque B. 2
La formule de Bochner (B.6) fournit un outil pour obtenir des résultats d'annulation pour les groupes $H^q_k(M)$. Dans le cas des 1-formes, on peut en déduire facilement que

$$H^{1,0}_k(M) = 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}, k > -a$$

où l'on a supposé que $Ric_h \geq a \cdot h$.

Nous avons maintenant le résultat suivant concernant la structure de l'algèbre des champs de Killing de (M, g_T).

Proposition B. 1
Supposons que $T = \sqrt{q}, q \in \mathbb{N}^{\star}$. Alors :

B. 8 $$\iota^k_{\mathbb{C}}(M, g_T) = 0, k \in \mathbb{Z}^{\star}\backslash\{\pm q\}$$

B. 9 $$\iota^{-q}_{\mathbb{C}}(M, g_T) \cong \iota^q_{\mathbb{C}}(M, g_T) = \mathcal{H}^{0,1}_q \cap Ker(Ric^H - \tfrac{1}{2}q(r+1))$$

B. 10 $$\iota^0_{\mathbb{C}}(M, g_T) \cong \{\alpha \in \iota_{\mathbb{C}}(N, g) : \alpha = Jdf, f \in C^{\infty}(N, \mathbb{C}), \textstyle\int_N f = 0\} \oplus \mathbb{R}.$$

Démonstration :
La première afirmation est une conséquence du lemme B.1. Montrons l'assertion de (B.9). Rappellons que $\beta \in \Lambda^1(M)$ est une forme de Killing pour g_T ssi

B. 11 $$\Delta_{g_T}\beta = 2Ric_{g_T}\beta \text{ et } d^\star_{g_T}\beta = 0$$

(voir [33], page 44, théorème 2.3). Soit α dans $\iota^q_{\mathbb{C}}(M, g_T)$. Comme α est horizontale on obtient par (2.2.19) que

$$\Delta_H\alpha + q\alpha = 2Ric_{g_T}\alpha.$$

Par (B.3) et la formule de Weizenböck (B.5) il s'ensuit que

B. 12 $$(\nabla^H)^\star\nabla^H\alpha = Ric^H\alpha - q\alpha.$$

De l'autre côté, α et $J\alpha$ vérifient l'équation de Killing. Il est facile d'en tirer $D'\alpha = 0$ donc $\alpha \in \mathcal{H}^{0,1}_q$ par le corollaire B.1. Ceci donne, par la formule de Bochner (B.6) :

B. 13 $$(\nabla^H)^\star\nabla^H\alpha + Ric^H\alpha = qr \cdot \alpha.$$

Par comparaison de (B.12) et (B.13) on arrive à $Ric^H\alpha = \frac{1}{2}q(r+1) \cdot \alpha$. Montrons maintenant que

$$\mathcal{H}^{0,1}_q(M) \cap Ker(Ric^H - \frac{1}{2}q(r+1)) \subseteq \iota^q_{\mathbb{C}}(M, g_T).$$

Soit $\alpha \in \mathcal{H}^{0,1}_q(M) \cap Ker(Ric^H - \frac{1}{2}q(r+1))$. Il s'agit de vérifier que α satifait (B.11). Tout d'abord, nous avons $d^\star_{g_T}\alpha = d^\star_H\alpha = 0$ car $\alpha \in \mathcal{H}^{0,1}_q \subseteq \mathcal{P}^1_q$. Pour montrer que $\Delta_{g_T}\alpha = 2Ric_{g_T}\alpha$, on refait, en sens inverse, la preuve de la première inclusion.
La preuve de la troisième assertion relève de la routine ■

Remarque B. 3
L'isomorphisme de (B.10) est donné par :

$$\alpha = Jdf \to \pi^\star(Jdf) + \frac{1}{T^2}(f \circ \pi)\theta.$$

Remarque B. 4
(i) Supposons que $r = 1$ i.e. N est une surface. Alors soit $\iota_{\mathbb{C}}(M, g_T) = \iota^0_{\mathbb{C}}(M, g_T)$ soit (M, g_T) est de courbure sectionelle constante.
(ii) Si (N, g) est de Kähler-Einstein avec $Ric_g = \frac{1}{2}q(r+1)g$ alors

$$\iota_{\mathbb{C}}(M, g_{\sqrt{q}}) = \iota^0_{\mathbb{C}}(M, g_T) \oplus \left[H^{0,1}_q(M)\right]^2$$

donc les groupes de cohomologie de Dolbeault produisent des isométries de (M, g_T). Bien sûr, il se peut que la base n'en ait pas. Il faut aussi s'assurer que les groupes $H^{0,1}_q(M)$ ne sont pas réduits à zéro.
(iii) Lorsque $T^2 > \frac{2}{r+1}$ sup (Ric^H) nous avons que $\iota_{\mathbb{C}}(M, g_T) = \iota^0_{\mathbb{C}}(M, g_T)$, par la proposition précédente.

Bibliographie

[1] B.L. Beers, R.S. Millman, *The spectra of the Laplace-Beltrami operator on compact, semisimple Lie groups*, Amer. J. Math. **99**, 801-807, (1977)

[2] L. Bérard Bergery, J-P. Bourguignon, *Riemannian submersions with totally geodesic fibers*, Illinois J.Math. **26**, 181-200, 1982.

[3] M.Berger, *Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes*, Compositio Math. **23**, 129-149, 1973.

[4] M.Berger, P.Gauduchon, E.Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lectures Notes in Math. **194**, Springer, Berlin-Heidelberg, 1971.

[5] N.Berline, E.Getzler, M.Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer Verlag, 1991.

[6] A.Besse, *Einstein Manifolds*, Springer,1987.

[7] G.Besson, M.Bordoni, *On the spectrum of Riemannian submersions with totally geodesic fibres*, Rend. Mat. Acc. Lincei, s.9, v.1 :335-340, 1990.

[8] D. Bleecker, *The spectrum of a riemannian manifold with a unit Killing vector field*, Transactions Amer. Math. Soc. **275**, 409-416, 1983.

[9] R.Bott, L.Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer Verlag, 1986.

[10] J-P. Bourguignon, P.Li, S.T. Yau, *Upper bounds for the first eigenvalue of algebraic submanifolds*, Comm. Math. Helv. **69**, 199-207, 1994.

[11] L. Boutet de Monvel, V. Guillemin, *The spectral theory of Toeplitz operators*, Ann. of Math. Studies No.99, Princeton University Press, 1981.

[12] B.Colbois, G.Courtois, Petites valeurs propres des p-formes differéntielles et classe d'Euler des S^1-fibrés, *à paraitre* , Annales de L'ENS, 2000.

[13] B.Colbois, J.Dodziuk, *Riemannian Metrics with large* λ_1, Proc.Math.Soc., **122**, 905-906, 1994.

[14] G. de Rham, *Variétés différentielles*, Hermann, Paris, 1974.

[15] F. ElChami, *Thèse de doctorat*, Univérsité Paris Sud, 2000.

[16] R.Forman, *Spectral sequences and adiabatic limits*, Commun.Math.Phys. **168**, 57-116, 1995.

[17] R.Forman, *Hodge theory and spectral sequences*, Topology 33, 3, 1994, 591-611.

[18] S.Gallot, D.Hullin, J.Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer, 1986.

[19] S.Gallot, D.Meyer, *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J.Math.pures et appl., **54**, 259-284, 1975.

[20] G.Gentile, *A class of 3-dimesional manifolds with bounded first eigenvalue on 1-forms*, paraître dans Proc.Amer.Math.Soc.

[21] G.Gentile, V.Pagliara, *Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree p*, Proc. Amer.Math.Soc., **123**, 3855-3856, 1995.

[22] Z.Ge, *Collapsing Riemannian metrics to Carnot-Caratheodory metrics and laplacians to sub-laplacians*, Can.J.Math. **45**,537-553, 1993.

[23] P.B.Gilkey, J.H.Park, *Eigenvalues of the laplacian and riemannian submersions*, Yokohama Math. J, 43, No1, 7-11, 1995.

[24] P.B.Gilkey, J.H.Park, *Riemannian submersions which preserve the eigenforms of the laplacian*, Ill.J.Math., 40, No2, 194-201, 1996.

[25] S.I.Goldberg, *Curvature and homology*, Academic Press, 1962.

[26] C.Gordon, E.Wilson, *The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds*, Michigan Math.J. **33**, 253-271, 1986.

[27] C.Gordon, E.Wilson, *Isospectral deformations of compact solvmanifolds*, Journal of Differential Geometry, **19**, 241-256, 1984.

[28] P.A.Griffiths , J.Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, J.Wiley, New-York 1978.

[29] J. Hersch, *Quatre propriétés isopérimétriques des membranes sphériques homogènes* , C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A. **270**, 139-144, 1970.

[30] E. Kaneda, *The spectra of* 1*-forms on simply connected compact irreducible Riemannian symmetric spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **23**, 369-395, (1983).

[31] E. Kaneda, *The spectra of* 1*-forms on simply connected compact irreducible Riemannian symmetric spaces II*, J. Math. Kyoto Univ. **24**, 141-162, (1984).

[32] S.Kobayashi, K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* , vol1 , Wiley, 1969.

[33] S.Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer, 1995.

[34] R.Kuwabara, *Spectrum of the Schödinger operator on a line bundle over complex projective spaces*, Tôhoku Math.J. **40** (1988), 199-211.

[35] A. Ikeda, Y. Taniguchi, *Spectra and eigenforms of the laplacian on S^n and $P^n(\mathbb{C})$*, Osaka J. Math. **15** (1978), 515-546.

[36] R.Mazzeo, R.Melrose, *The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray's spectral sequence for a fibration*, J.Diff. Geometry 31, 1990, 185-213.

[37] L. Paquet, *Méthode de séparation des variables et calcul du spectre d'opérateurs sur les formes différentielles*, Bull. Sci. math., 2e série, **105** (1981), 85-112.

[38] H.Pesce, *Calcul du spectre d'une nilvariété de rang deux et applications*, Transactions of the American Mathematical Society, **339**, 281-330, 1993.

[39] H. Pesce, *Une formule de Poisson pour les variétés de Heisenberg*, Duke Math. J. **75** (1994), 79-95.

[40] H.Pesce, *Quelques applications de la théorie des representations en géometrie spectrale*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Vol.18, Roma (1998), 1-63.

[41] S. Rosenberg, *The laplacian on a riemannian manifold*, London Math. Soc., 1997.

[42] M.Rumin, *Formes différentiellles sur les variétés de contact*,J.Differential Geometry, **39**, 281-330, 1994.

[43] M.Rumin, *Sub-Riemannian limit* , GAFA, 1998.

[44] L. Schubert, *The laplacian on p-forms on the Heisenberg group*, preprint de l'Univérsité d'Adelaide, 1998.

[45] N.Tanaka, *A differential geometric study of strongly pseudo- convex manifolds*, Kinokuniya Book-Store, 1975.

[46] C. Tsukamoto, *Spectra of Laplace-Beltrami operators on $SO(n+2)/SO(2)\times SO(n)$ and $Sp(n+1)/Sp(1)\times Sp(n)$*, Osaka J. Math. **18**, 407-426, (1981).

[47] N.R.Wallach, *Harmonic analysis on homogenous spaces*, Marcel Dekker, New-York, 1973.

[48] A.Weil, *Introduction à l'étude des variétés kähleriennnes*, Hermann, Paris, 1958.

[49] Y. Xu, *Diverging eigenvalues and collapsing riemannian metrics*, Institute for Advanced Study, October 1992.

[50] P.Yang, S-T.Yau, *Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds*, Ann. Scuola Norm.Sup. Pisa **7**, 1980, 55-63.

Index de notations

θ	forme de connexion principale, 17
ω	forme de courbure de θ, 17
H	distribution horizontale, 15, 24
R_z	translation associée à $z \in S^1$, 21
R	champ de vecteur transverse, 15, 24
$X^\star$	relevé horizontal du champ X, 24
J	structure complexe , 20
L	multiplication avec la forme de courbure, 13
S	multiplication extérieure avec la forme η, 17
g_T	métrique riemannienne, 16
$\mathcal{J}$	morphisme de bigraduation , 22
∇^T	connexion de Levi-Civita de (M, g_T), 23
∇	connexion de Levi-Civita de (N, h), 25
∇^H	connexion partielle sur $\Lambda^\star(H)$, 28
d	différentielle exterieure, 5
$d^\star$	codifférentielle exterieure, 5
d_H	différentielle exterieure horizontale, 12
$d_H^\star$	codifférentielle exterieure horizontale, 14
$\partial_H, \overline{\partial_H}$	différentielles exterieures horizontales complexes, 27
$\partial_H^\star, \overline{\partial_H}^\star$	codifférentielles exterieures horizontales complexes, 27
Δ	laplacien, 5
Δ_{g_T}	laplacien de la métrique g_T, 12
Δ_H	laplacien horizontal, 15
$\Delta_{\overline{\partial_H}}, \Delta_{\partial_H}$	laplaciens horizontaux complexes, 29
Δ_H^T	laplacien horizontal elliptique, 15, 24
$G^{\Delta_H}, G^{\Delta_{\overline{\partial_H}}}, G^{\Delta_{\partial_H}}$	fonctions de Green, 32
$H^{\Delta_H}, H^{\Delta_{\overline{\partial_H}}}, H^{\Delta_{\partial_H}}$	projections harmoniques, 32
$\Lambda^q(H)$	espace des q-formes horizontales, 9
$\Lambda^{s,t}(H)$	espace de formes horizontales de type (s,t), 19
$\Lambda_k^q(H)$	espace des q-formes horizontales et k-équivariantes, 18

$\Lambda_k^{s,t}(H)$	espace de formes horizontales de type (s,t), k-équivariantes, 20
$\mathcal{S}^q$	espace des q-formes primitives, 19
$\mathcal{S}_k^q$	espace des q-formes primitives et k-équivariantes, 20
$\mathcal{S}_k^{s,t}$	espace de formes du type (s,t), primitives et k-équivariantes, 20
$\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$	noyaux des opérateurs $\Delta_H, \Delta_{\overline{\partial_H}}, \Delta_{\partial_H}$, 29
$\mathcal{H}^q, \mathcal{H}_k^q$	noyau de l'opérateur Δ_H en restriction à l'espace $\mathcal{S}^q$ resp. $\mathcal{S}_k^q$, 29
$\mathcal{H}_1^q, \mathcal{H}_{1k}^q$	noyau de l'opérateur $\Delta_{\overline{\partial_H}}$ en restriction à l'espace $\mathcal{S}^q$ resp. $\mathcal{S}_k^q$, 29
$\mathcal{H}_2^q, \mathcal{H}_{2k}^q$	noyau de l'opérateur Δ_{∂_H} en restriction à l'espace $\mathcal{S}^q$ resp. $\mathcal{S}_k^q$, 29
$Harm^q(M, g_T)$	espace des q-formes harmoniques de (M, g_T), 31
$Harm^q_{prim}(N,h)$	espaces de formes harmoniques et primitives de (N,h), 93
$\overline{H}^q(M)$	q-ième groupe de cohomologie de Dolbeault, 27
$b_q(M), b_q(N)$	nombres de Betti, 90
$\widetilde{b}_q(N)$	nombre de Betti primitif de (N,h), 93
$\mathcal{P}^q$	espace fondamental de q-formes horizontales, 34
$\mathcal{P}_k^q$	espace fondamental de q-formes horizontales et k-équivariantes, 34
$\mathcal{T}_p^s, \mathcal{R}_p^s$	espaces de formes de décomposition de Lefschetz tronquée, 43
E, E_1, E_2, I_1	espaces fondamentaux de formes primitives, 44, 45
E_3, E_3', E_3''	espaces fondamentaux de formes primitives, 51
$E_\lambda(\Delta_{g_T}^q)$	espace propre du laplacien des q-formes de (M, g_T), 55
$F_\lambda^q(T)$	espace propre de Δ_H^T agissant sur l'espace $\mathcal{P}^q$, 69
$E_k^q(\lambda), F_k^q(\lambda),$	
$F_R^{q,k}(\lambda), F_r^{q,k}(\lambda)$	espaces de formes propres pour Δ_H^T, équivariantes, 41
$E_{1,p}^s(\lambda), E_{2,p}^s(\lambda)$	
$F_{1,p}^s(\lambda), F_{2,p}^s(\lambda)$	
$\mathfrak{e}_{i,p}^s(\lambda), i=\overline{1,3}$	
$\mathfrak{f}_{j,p}^s(\lambda), j=\overline{1,3}$	
$\mathfrak{E}_p^s(\lambda), \mathfrak{F}_p^s(\lambda)$	espaces de formes horizontales, 72
$\mathcal{E}_{2,p}^s(\lambda), I_{1,p}^s(\lambda)$	espaces de formes horizontales, 85
$\mathcal{F}_{2,p}^s(\lambda), I_{2,p}^s(\lambda)$	espaces de formes horizontales, 93
c_p	constante, 72
$f_i^s, i=\overline{1,3}$	applications de réalisation abstraites, 55, 59, 63
Π^1, Π^2	projections, 55
$f_{i,p}^s, i=\overline{1,3},$	
$f_p,$	
$g_{i,p}^s, i=\overline{1,3},$	applications de réalisation , 86, 90, 94
$h_{i,p}^s, i=\overline{1,4},$	
P_p^s, R_p^s	polynômes fondamentaux, 72
$\sigma^q(T), \sigma_r^q(T),$	
$\mathfrak{D}_i^q(T), i=\overline{1,4}$	spectres fondamentaux, 77
$f_{i,p}^q$	fonctions de séparation, 77
$\sigma_{i,p}^q(T), i=\overline{1,2},$	
$\mathfrak{h}_{j,p}^q(T), j=\overline{1,3}$	collections fondamentales , 74
$\mathfrak{h}^{2p+2}(T), \mathfrak{f}^{2p+2}(T),$	
$\mathfrak{c}^{2p+2}(T)$	spectres cohomologiques, 74

Σ^q, Σ^q_r	spectres de formes invariantes, 107
$\eta_q, \theta_q,$	
$Tr_M(e^{-t\Delta_{g_T}}), Tr_N(e^{-t\Delta_h})$	traces du noyau de la chaleur, 97, 99, 94, 99
$Tr^0_M(e^{-t\Delta^{2p+2}_{g_T}})$	trace du noyau de la chaleur du laplacien agissant sur les formes invariantes de (M, g_T), 94
$\tilde{\theta}_q$	traces du noyau de la chaleur du laplacien de (N, h), 110, 112
d_{g_T}	distance associée à la métrique g_T, 109
d_c	distance de Carnot, 109
$\sigma^q, \sigma^q_R,$	
σ^q_r	spectres du laplacien horizontal , 110
$\lambda_n(D)$	$n-$ ième valeur propre de l'opérateur D, 111
H_{2n+1}	groupe de Heisenberg, 105
$\gamma(x, y, t)$	élement du groupe H_{2n+1}, 105
$\mathfrak{h}_n$	algèbre de Lie du groupe de Heisenberg, 105
$X(x, y, t)$	élement de l'algèbre $\mathfrak{h}_n$, 105
$\mathfrak{z}_n$	centre de $\mathfrak{h}_n$, 105
$\mathcal{B}$	base canonique dans $\mathfrak{h}_n$, 105
X_i, Y_i, Z	élements de la base canonique de $\mathfrak{h}_n$, 105
Γ_r	sous-groupe discret, cocompact de H_{2n+1}, 105
$\lvert\Gamma_r\rvert$	invariant du groupe Γ_r, 106
$\mathcal{L}_r$	réseau dans $\mathbb{R}^{2n}$, 106
$M(r)$	quotient compact du groupe de Heisenberg, 106
$T(r)$	tore , 106
ω_0	forme symplectique canonique , 106
$\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$	ensemble de structures complexes linéaires, 106
h_J	produit scalaire, 107
$M(r, J, T)$	classe de variétés de Heisenberg , 107
$b^n_{t,s}, b^n_q$	nombres de Betti du tore $T(r)$, 108
$\mu(\alpha, t)$	valeur propre, 108
S^{2r+1}	sphère, 111
$P\mathbb{C}^r$	espace projectif, 111
P^p_m	formes polynômiales homogènes, 112
P_m	polynômes homogènes , 113
$H^p_m, {}'H^p_m,$	
${}''H^p_m$	espaces de formes polynômiales harmoniques, 113
$r\frac{d}{dr}$	champ de vecteurs, 113
I	produit intérieur avec $r\frac{d}{dr}$, 113
$\tilde{H}^p_m, {}'\tilde{H}^p_m,$	
${}''\tilde{H}^p_m$	espaces de formes sur la sphère, 113
$\star$	opérateur de Hodge, 114
$\star_0$	opérateur de Hodge sur $\mathbb{R}^{2r+2}$, 114
rdr	forme différentielle, 114
E	produit extérieur avec dr, 114
λ^p_m, μ^p_m	valeur propres, 115

$\iota(M, g_T), \iota_{\mathbb{C}}(M, g_T)$,	
$\iota^k_{\mathbb{C}}(M, g_T)$	algèbres de champs de Killing de (M, g_T), 129
R^H	tenseur de courbure pseudohermitienne, 130
Ric^H, Ric_{g_T}, Ric_h	tenseurs de Ricci, 130
D'	opérateur de dérivation , 131