C.R. 150 (1910), 674-677
(Oeuvres, V.R.I, 403, 404, 398, 399)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues*. Note de M. **Frédéric Riesz**.

1. Appelons classe $[L^p]$ la totalité des fonctions $f(x)$, réelles ou non, définies sur l'intervalle (a, b), sommables et telles que $|f|^p$ est sommable. Nous supposons $p > 1$. Les classes $[L^p]$ et $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ sont intimement liées; entre autres, le produit de deux fonctions quelconques dont l'une, $f(x)$, appartient à la classe $[L^p]$, l'autre, $g(x)$, à la classe $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$, est toujours sommable, et l'on a

$$(1) \qquad \left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqq \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

Envisageons le système d'équations

$$(2) \qquad \int_a^b f_k(x)\,\xi(x)\,dx = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

les fonctions données $f_k(x)$ appartenant à la classe $[L^p]$, nous assujettissons la fonction cherchée $\xi(x)$ à être de classe $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$. Si le système (2) admet une telle solution, et si pour cette solution on a

$$(3) \qquad \int_a^b |\xi(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx \leqq M^{\frac{p}{p-1}},$$

on en conclut, en se servant de (1), que l'inégalité

$$(4) \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k c_k\right| \leqq M \left[\int_a^b \left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

a lieu quels que soient n et les nombres, réels ou non, μ_k. Ainsi, *la validité de l'inégalité* (4) *est une condition nécessaire de ce que le système* (2) *admette une solution telle que* (3). Dans un Mémoire qui est sous presse, j'ai montré que *la même condition est aussi suffisante.*

Dans cette Note je vais traiter un cas limite.

2. Supposons les $f_k(x)$ *continues* et tentons d'élargir les conditions por-

tant sur la fonction cherchée. Les résultats concernant la représentation des opérations linéaires par des intégrales de Stieltjes que j'ai développées il y a quelque temps dans ces *Comptes rendus* (29 novembre 1909) nous suggèrent de substituer au système (2) le système

$$\int_a^b f_k(x)\,d\alpha(x) = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots); \tag{5}$$

nous assujettissons la fonction cherchée $\alpha(x)$ à être *à variation bornée*. Maintenant l'*inégalité*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k c_k\right| \leqq M \times \max. \left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k(x)\right| \tag{6}$$

exprime une condition nécessaire à ce que le système (5) *admette une solution* $\alpha(x)$ *dont la variation totale ne surpasse pas* M; *l'inégalité doit avoir lieu quels que soient le nombre entier n et les nombres réels ou non* ~~M_k~~. μ_k

Nous allons voir que *cette condition est aussi suffisante*.

3. Envisageons d'abord le cas particulier d'un nombre fini n d'équations. Supposons la condition remplie. Remarquons qu'une fonction continue $f(x)$ appartient à toutes les classes $[L^p]$ et que, $\frac{1}{p}$ tendant vers 0, les valeurs $\left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$ tendent vers le maximum de $[f(x)]$ (¹). Ajoutons encore que si l'on pose $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k(x)$ et si l'on assujettit les μ_k à ne pas surpasser en valeur absolue une certaine borne finie, cette convergence est uniforme. Tout cela se démontre d'une façon assez élémentaire. On en conclut aisément que, quelque petite que soit la quantité positive ε, on a pour les valeurs de p suffisamment grandes

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k c_k\right| \leqq (M+\varepsilon)\left[\int_a^b \left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k(x)\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Or nous l'avons vu plus haut, cette inégalité exprime précisément la con-

(¹) Il me faut remercier M. E. Fischer d'avoir attiré mon attention sur ce fait intéressant.

dition pour que le système

$$\int_a^b f_k(x)\xi(x)\,dx = c_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

admette une solution $\xi(x)$ telle que (3), M étant remplacé par $M+\varepsilon$. Posant $\alpha(x)=\int_a^x \xi(x)\,dx$, on a une fonction $\alpha(x)$ à variation totale $\leqq (b-a)^{\frac{1}{p}}(M+\varepsilon)$, solution du système (5).

Pour en déduire une solution, dont la variation totale ne surpasse pas M, faisons tendre ε vers o. On aura ainsi une suite de fonctions $\alpha_\varepsilon(x)$ à variation bornée, bornées dans leur ensemble, dont chacune satisfait au système (5); et quelque petite que soit la quantité positive δ, on est sûr que pour ε, suffisamment petite, la variation totale de $\alpha_\varepsilon(x)$ ne surpasse pas $M+\delta$. On en conclut l'existence d'une solution $\alpha(x)$ dont la variation totale ne surpasse pas M. Pour définir une telle fonction, il suffit d'envisager la suite des fonctions $A_\varepsilon(x)=\int_a^x \alpha_\varepsilon(x)\,dx$, également continues et bornées dans leur ensemble; on en tire, à l'aide d'un artifice bien connu, une suite partielle $\left[A_i(x)=\int_a^x \alpha_i(x)\,dx\right]$ qui tend uniformément vers une fonction continue $A(x)$. On reconnaît aisément, en appliquant le critère donné dans ma Note déjà citée, que $A(x)$ est l'intégrale d'une fonction $\alpha(x)$ à variation bornée dont la variation totale ne surpasse pas M. Des considérations analogues à celles dont je me suis servi dans la Note citée, font aussi voir que l'intégrale de $f(x)\,d\alpha_i(x)$ tend pour $i=\infty$ vers celle de $f(x)\,d\alpha(x)$, quelle que soit la fonction continue $f(x)$. On en conclut, en particulier, que $\alpha(x)$ satisfait au système (5).

4. Quand le système (5) se compose d'une infinité dénombrable d'équations, on applique le résultat que nous venons d'établir, aux systèmes partiels finis de (5). D'après ce résultat, la condition (6) étant supposée remplie, il existe pour chaque n une solution $\alpha^{(n)}(x)$ des n premières équations, dont la variation totale ne surpasse pas M. Par le même procédé que nous venons d'employer pour les fonctions $\alpha_\varepsilon(x)$, la suite $[\alpha^{(n)}(x)]$ conduira *à une fonction* $\alpha^*(x)$, *satisfaisant au système complet* (5) *et dont la variation totale ne surpasse pas* M.

On sait aussi bien que *le cas d'une infinité dénombrable d'équations représente le cas général.* Cela revient au fait que chaque ensemble non dénombrable de fonctions continues contient un sous-ensemble dénombrable tel que chaque fonction de l'ensemble primaire en est fonction limite.

5. En particulier notre résultat contient le théorème portant sur la représentation des opérations linéaires par des intégrales de Stieltjes. En voici un autre corollaire qui décidera définitivement une question classique remontant à Weierstrass, posée et traitée avec bien du succès par M. E. Schmidt (*Dissertation*, Göttingen, 1905) : *Étant donné un ensemble de fonctions continues* $\varphi(x)$, *pour que la fonction continue* $f(x)$ *puisse être approchée uniformément et indéfiniment par les* $\varphi(x)$ *ou par leurs combinaisons linéaires, il faut et il suffit que toujours quand une fonction* $\alpha(x)$ *à variation bornée* $\alpha(x)$ *satisfait à toutes les équations*

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\alpha(x) = 0, \tag{7}$$

on ait aussi

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = 0.$$

En particulier *pour que l'on puisse approcher toute fonction continue, il faut et il suffit que toute fonction à variation bornée qui satisfait au système* (7) *soit constante sauf peut-être pour un ensemble dénombrable de valeurs* x *différentes de* a *et* b.

(14 mars 1910.)