SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE.

Par M. **G. Mittag-Leffler**, à Stockholm.

(Extrait d'une Lettre à M. Émile Picard).

Adunanza del 24 giugno 1900.

. . . .

Dans vos « Lectures on Mathematics » à la « Decennial Celebration de « Clark University » vous parlez (p. 214) des différentes méthodes d'arriver à ce théorème de Weierstrass *), que chaque fonction réelle continue dans un intervalle fini peut toujours être représentée avec chaque approximation voulue par un polynôme.

Vous parlez de votre propre démonstration si élégante **), ainsi que d'une autre de M. Volterra ***). Je me permets d'appeler encore votre attention sur une démonstration qui doit être antérieure tant à la vôtre qu'à celle de M. Volterra. Elle est de M. Runge et se trouve dans son mémoire : *Ueber die Darstellung willkürlicher Functionen,* que j'ai publié dans le tome 7 de mon journal †).

---

*) *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen.* Erste Mittheilung. (Berliner Sitzungsbericht, 1885, p. 324). — Traduction Laugel, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4[e] série, t. II (1886), p. 109.

**) Émile Picard, *Sur la représentation approchée des fonctions* [Comptes Rendus, t. CXII (1891), p. 183]; *Traité d'Analyse,* t. I, p. 258.

***) Vito Volterra, *Sul principio di Dirichlet* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XI (1897), pp. 83-86]. Encore une autre démonstration a été donnée par M. Lebesgue [Bulletin des Sciences Mathématiques, 2[e] série, t. XXII (1898), p. 278].

†) Acta Mathematica, t. VII (1885), p. 387.

M. Runge se sert, pour la démonstration, de la fonction

$$\frac{1}{1+x^{2n}},$$

qui a la propriété

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=1; \qquad |x|<1,$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=0; \qquad |x|>1.$$

C'est avec une modification sans importance la même fonction et la même propriété dont s'est servi antérieurement M. Tannery *) pour obtenir un autre théorème de Weierstrass **) qu'*on peut toujours former une série*

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} R_\nu(x),$$

où les $R_\nu(x)$ sont des fonctions rationnelles de x, telles que la série possède les propriétés suivantes:

$K^{(1)}$, $K^{(2)}$, ... $K^{(r)}$ *étant, dans le plan des x, r cercles différents qui n'ont aucune partie commune, elle représente dans chacune des $r+1$ régions différentes limitées par ces cercles une fonction différente* ***).

Il est vrai que M. Runge démontre seulement qu'une fonction réelle continue quelconque peut toujours dans un intervalle donné être représentée avec chaque approximation voulue par une *fonction rationnelle*, mais il a lui-même indiqué autre part †) comment il est possible

---

*) Voir: *Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques*, par M. Weierstrass; traduction de M. J. Tannery [Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, II^e^ série, t. V (1881), pp. 181-183]. — Weierstrass, *Werke*, Bd. II, pp. 231-233.

**) *Remarques*, etc., p. 177. — Weierstrass, *Werke*, Bd. II, p. 219.

***) Dans des publications récentes il paraît qu'on a un peu oublié que cette proposition tout-à-fait fondamentale a été mise pleinement en lumière dans le mémoire de Weierstrass.

†) *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* [Acta Mathematica, t. VI (1884), p. 236].

Je trouve sur ce sujet parmi mes papiers un article de M. Phragmén, de l'année 1886, ainsi conçu:

« In den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885 Juli, hat Herr Weierstrass die folgenden beiden Sätze bewiesen:

« SATZ B.—*Ist $f(x)$ eine stetige Function der reellen Veränderlichen x und wird* d'exprimer dans un intervalle donné une fonction rationnelle avec chaque approximation voulue par un polynôme.

« *x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt, so lässt sich auf mannigfaltige Weise* « *eine* GANZE RATIONALE *Function* $G(x)$ *bestimmen, welche in dem festgesetzten Inter-* « *valle beliebig wenig von der Function* $f(x)$ *verschieden ist* ».

« SATZ D. — *Ist* $f(x)$ *eine Function der angegebenen Beschaffenheit, welche die* « *reelle Periode* $2c$ *besitzt, so lässt sich auf mannigfaltige Weise eine* GANZE RATIONALE « *Function der Functionen* $\cos\frac{\pi x}{c}$ *und* $\sin\frac{\pi x}{c}$ *bestimmen, welche für alle reelle Werthe* « *der Veränderlichen* x *beliebig wenig von* $f(x)$ *verschieden ist* ».

« Aus diesen Sätzen folgen unmittelbar die Sätze über die Darstellung der Func- « tionen der genannten Beschaffenheit in der Form gleichmässig convergirender « Reihen, deren Glieder ganze rationale Functionen von x, resp. von $\cos\frac{\pi x}{c}$ und « $\sin\frac{\pi x}{c}$ sind.

« In dem siebenten Bande der Acta Mathematica hat nun Herr Runge den « ersten dieser Sätze auf sehr einfache Weise in so fern bewiesen, dass er gezeigt « hat, dass man eine rationale Function $R(x)$ finden kann, welche das Gewünschte « leistet. Am Schlusse seines Aufsatzes bemerkt Herr Runge, dass man nach einem von « ihm in Acta Bd. 6 (in dem Aufsatz *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Func-* « *tionen*) gegebenen Satze die Form dieser rationalen Function auf mannigfache Weise « vereinfachen kann.

« Er scheint jedoch dabei übersehen zu haben—oder wahrscheinlich hat er darauf « kein Gewicht gelegt—dass man die rationale Function u. A. auch mit einer ganzen « ersetzen kann.

« In der That, der citirte Satz des Herrn Runge besagt, dass wenn eine ra- « tionale Function gegeben ist, deren sämmtliche Unendlichkeitsstellen innerhalb eines « gewissen zusammenhängenden Bereiches liegen, und wenn man in dem Innern dieses « Bereiches eine beliebige Stelle festsetzt, man stets auf mannigfache Weise eine ratio- « nale Function finden kann, welche nur auf der festgesetzten Stelle unendlich wird « und ausserhalb des betrachteten Bereiches beliebig wenig von der gegebenen Func- « tion verschieden ist. In unserem Fall nun giebt es einen zusammenhängenden Bereich, « welcher der Bedingung entspricht, dass die Unendlichkeitsstellen der Function $R(x)$ « und die Stelle $x=\infty$ innerhalb, das gegebene reelle Intervall aber ausserhalb dessel- « ben liegt. Man kann also die gefundene Function $R(x)$ durch eine andere ersetzen, « welche nur für $x=\infty$ unendlich wird, d. h. durch eine *ganze* rationale Function « $G(x)$. Ist die gegebene Function $f(x)$ reell, so ist der reelle Theil von $G(x)$ eine « *ganze* rationale Function, welche auch das Geforderte leistet.

« Wollte man dieses Resultat direkt herleiten, so könnte dies am einfachsten auf « die folgende Weise geschehen.

« Die rationale Function $R(x)$, wie sie Herr Runge bestimmt, ist eine reelle « Function und kann nur für imaginäre Werthe von x unendlich werden. Man kann

Je me permets, enfin, de vous communiquer une nouvelle démonstration que j'ai donnée dans mon cours et qui me parait être plus élémentaire que toutes les autres démonstrations qui ont été proposées.

« also schreiben

$$R(x) = g(x) + r(x) + r'(x)$$

« wo $g(x)$ eine ganze rationale Function ist, $r(x)$ eine rationale Function, deren singu-« läre Stellen sämmtlich oberhalb der reellen Axe liegen, und $r'(x)$ die rationale « Function, welche man aus $r(x)$ erhält, wenn man alle Coefficienten im Zähler und « im Nenner mit ihren conjugirten Grössen vertauscht.

« Es ist nun immer möglich eine Stelle x_0 unterhalb der reellen Axe so zu « wählen, dass wenn man um x_0 mit angemessenem Radius einen Kreis beschreibt, das « gegebene reelle Intervall innerhalb, die singulären Stellen von $r(x)$ aber ausserhalb « derselben fallen. Dann kann man $r(x)$ in eine Potenzreihe nach ganzen positiven « Potenzen von $(x - x_0)$ entwickeln, welche in diesem Kreise gleichmässig convergirt.

« Man kann also aus der Summe einer hinreichend grossen Anzahl von Gliedern « dieser Reihe eine ganze rationale Function $h(x)$ bilden, welche in dem betrachteten « Kreise und also auch auf dem gegebenen Intervall beliebig wenig von $r(x)$ ver-« schieden ist. Ist $h'(x)$ die conjugirte Function von $h(x)$, so ist

$$|h'(x) - r'(x)| = |h(x) - r(x)|;$$

« also ist die ganze Function

$$g(x) + h(x) + h'(x)$$

« von der rationalen Function $R(x)$, also auch von der Function $f(x)$ beliebig wenig « verschieden.

« Den zweiten, oben citirten Satz des Herrn Weierstrass hat Herr Runge « in seinem Aufsatze nicht besprochen. Es ist aber auch dieser Satz eine unmittelbare « Folge aus den von Herrn Runge bewiesenen Sätzen. Herr Runge zeigt nämlich, « dass wenn $\varphi(u)$ eine stetige Function der reellen Veränderlichen u ist, welche für « $u = \pm\infty$ einen bestimmten Grenzwerth besitzt, so kann man die rationale Function « $R(u)$ so bestimmen, dass sie sich für *alle* reelle Werthe von u beliebig genau an « $\varphi(u)$ anschliesst.

« Setzen wir jetzt $u = \operatorname{tang}\dfrac{x\pi}{2c}$, so wird die periodische Function $f(x)$ im « zweiten Satze des Herrn Weierstrass zu einer eindeutigen und stetigen Function « $\varphi(u)$, welche für $u = \pm\infty$ sich dem Werthe $f(c)$ nähert. Es giebt also eine Function « $R(u) = R\left(\operatorname{tang}\dfrac{x\pi}{2c}\right)$, welche beliebig wenig von $f(x)$ verschieden ist. Diese « Function wird für keinen reellen Werth von u, also auch für keinen reellen Werth « von x unendlich.

« Setzt man $z = e^{\frac{x\pi i}{c}}$, woraus $u = i\dfrac{1 - z}{1 + z}$ folgt, so geht $R(u)$ in eine ratio-« nale Function der Veränderlichen z über, welche sich in einem von zwei concen-

L'expression limite

$$\lim_{n=\infty} \chi_n(x),$$

où

$$\chi_n(x) = 1 - 2^{1-(1+x)^n}$$

et x désigne une variable réelle plus grande que -1, possède évidemment les propriétés suivantes :

$$\lim_{n=\infty} \chi_n(x) = 1\,; \qquad x > 0$$

$$\lim_{n=\infty} \chi_n(x) = -1\,; \qquad x < 0$$

$$\lim_{n=\infty} \chi_n(x) = 0\,; \qquad x = 0.$$

J'entends maintenant par $F(x)$ une fonction de la variable réelle x, qui reste réelle et continue dans l'intervalle

$$B > b \geqq x \geqq a > A.$$

Il est toujours possible d'interpoler entre a et b les points

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r < a_{r+1} = b$$

de telle manière que la fonction $F(x)$ est représentée, avec une approximation voulue, par la ligne polygonale qui est dessinée par les lignes droites successives *)

$$F_\mu(x) = F(a_{\mu-1}) + [F(a_\mu) - F(a_{\mu-1})]\frac{x - a_{\mu-1}}{a_\mu - a_{\mu-1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{\mu-1} \leqq x \leqq a_\mu \\ \mu = 1, 2, \ldots r+1 \end{array} \right\}.$$

« trischen Kreisen begrenzten Gebiete regulär verhält. Man kann sie daher als eine « Summe zweier Functionen darstellen, von denen die eine innerhalb des äusseren, « die zweite ausserhalb des inneren Kreises sich regulär verhält. Die erste kann im « ringförmigem Gebiete beliebig genau durch eine ganze rationale Function von « $z = \cos\frac{x\pi}{c} + i\sin\frac{x\pi}{c}$, die zweite durch eine eben solche Function von

$$\frac{1}{z} = \cos\frac{x\pi}{c} - i\sin\frac{x\pi}{c}$$

« dargestellt werden.

« Wollte man die Entwickelbarkeit von $R\left(\operatorname{tang}\frac{x\pi}{2c}\right)$ in eine trigonometrische « Reihe als bekannt voraussetzen, so könnte natürlich der Beweis noch ein wenig « kürzer gestaltet werden ».

*) Cette remarque a déjà été faite par M. Runge dans son mémoire « *Ueber die Darstellung,* etc. ».

A cause des propriétés que j'ai indiquées pour la fonction $\chi_n(x)$, cette ligne polygonale, n étant pris suffisamment grand, est représentée avec chaque approximation voulue par l'expression

$$y_x = \frac{1}{2}[F_1(x) + F_{r+1}(x)] + \frac{1}{2}\sum_1^r [F_\lambda(x) - F_{\lambda+1}(x)]\chi_n\left(\frac{a_\lambda - x}{B - A}\right),$$

qui n'est qu'une fonction entière transcendante de la variable x. Cette fonction peut donc toujours de son côté, dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, avec chaque approximation voulue, être représentée par un polynôme en x. Donc:

Soit $F(x)$ dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ une fonction réelle et continue de la variable réelle x. Soit encore δ une quantité positive si petite qu'elle soit. Il existe toujours un polynôme en x, soit $G(x)$, tel que la différence $F(x) - G(x)$ dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ soit en valeur absolue plus petite que δ.

C'est le théorème de Weierstrass qu'il s'agissait de démontrer.

Vous voyez que la même méthode peut être employée pour obtenir le théoreme analogue pour une fonction de plusieurs variables.

J'envisage, pour simplifier, une fonction de deux variables seulement. Soit donc $F(x, y)$, pour le domaine

$$A < a \leqq x \leqq b < B, \qquad A' < a' \leqq y \leqq b' < B',$$

une fonction réelle et continue des deux variables réelles x et y. Il est toujours possible d'interpoler dans le domaine des x entre a et b les points

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r < a_{r+1} = b,$$

de telle manière que la fonction $F(x, y)$ pour tous les y appartenant au domaine $a' \leqq y \leqq b'$ soit représentée avec une approximation voulue par la ligne polygonale

$$F_\mu(x, y) = F(a_{\mu-1}, y) + [F(a_\mu, y) - F(a_{\mu-1}, y)]\frac{x - a_{\mu-1}}{a_\mu - a_{\mu-1}}$$
$$\begin{Bmatrix} a_{\mu-1} \leqq x \leqq a_\mu \\ \mu = 1, 2, \ldots r+1 \end{Bmatrix}.$$

Cette ligne polygonale est représentée d'un autre côté avec chaque approximation voulue par l'expression:

$$Z_{x,y} = \frac{1}{2}[F_1(x, y) + F_{r+1}(x, y)]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_1^r [F_\lambda(x, y) - F_{\lambda+1}(x, y)]\chi_n\left(\frac{a_\lambda - x}{B - A}\right).$$

Cette expression de son côté peut toujours être représentée, avec chaque approximation voulue, par la fonction

$$\overline{F}(x,\ y) = \frac{1}{2}[F_1(x,\ y) + F_{r+1}(x,\ y)]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_1^r [F_\lambda(x,\ y) - F_{\lambda+1}(x,\ y)]\, g_{n,m}\left(\frac{a_\lambda - x}{B - A}\right),$$

où $g_{n,m}(x)$ désigne la somme des m premiers termes dans le développement de $\chi_n(x)$ suivant les puissances de x.

La fonction $\overline{F}(x,\ y)$ est un polynôme par rapport à x. Elle est, pour le domaine $a' \leqq y \leqq b'$, une fonction réelle et continue de la variable réelle y. On peut donc la représenter avec chaque approximation voulue par le polynôme

$$G(x,\ y) = \frac{1}{2}[\overline{F}_1(x, y) + \overline{F}_{r'+1}(x, y)]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_1^{r'} [\overline{F}_\lambda(x,\ y) - \overline{F}_{\lambda+1}(x,\ y)]\, \overline{g}_{n',m'}\left(\frac{a'_\lambda - y}{B' - A'}\right),$$

où

$$\overline{F}_\mu(x,\ y) = \overline{F}(x,\ a'_{\mu-1}) + [\overline{F}(x,\ a'_\mu) - \overline{F}(x,\ a'_{\mu-1})]\,\frac{y - a'_{\mu-1}}{a'_\mu - a'_{\mu-1}}$$
$$\left\{\begin{matrix} a'_{\mu-1} \leqq y \leqq a'_\mu \\ \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ r'+1 \end{matrix}\right\},$$

les

$$a' = a'_0 < a'_1 < a'_2 < \ldots < a'_{r'} < a'_{r'+1} = b'$$

étant choisis d'une manière convenable, et $\overline{g}_{n',m'}(y)$ désigne la somme des m' premiers termes du développement de $\chi_{n'}(y)$ suivant les puissances de y.

Donc:

Soit $F(x,\ y)$, *dans le domaine* $a \leqq x \leqq b,\ \ a' \leqq y \leqq b'$, *une fonction réelle et continue des variables réelles* x *et* y. *Soit encore* δ *une quantité positive si petite qu'elle soit. Il existe toujours un polynôme en* x *et* y, *soit* $G(x,\ y)$, *tel que la différence* $F(x,\ y) - G(x,\ y)$ *dans l'intervalle*

$$a \leqq x \leqq b,\quad a' \leqq y \leqq b'$$

soit en valeur absolue plus petite que δ *).

---

*) Il paraît que vous êtes le premier qui a publié une extension du théorème de Weierstrass à plusieurs variables (*voir* votre cours, tome I, page 263). Weierstrass indique pourtant qu' il n' y a pas de difficulté de faire une telle extension

Vous trouverez bientôt dans un mémoire très-important de M. Helge von Koch sur les nombres premiers *) une autre application de la fonction discontinue $\chi_n(x)$.

Nous avions eu, M. von Koch et moi, indépendamment l'un de l'autre, l'idée d'employer cette fonction dans deux problèmes bien différents.

Djursholm, avril 1900.

G. MITTAG-LEFFLER.

[*Ueber die analytische Darstellbarkeit,* etc. Zweite Mittheilung (Sitzungsber. der Pr. Akad. der Wiss., 1885, p. 457)]. Il donnait cette extension dans son cours à Berlin l'année 1884. Il employait pour y arriver, au lieu de l'intégrale simple

$$\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

l'intégrale multiple

$$\frac{1}{2^n\omega^n k^n}\int_s f(u_1, u_2, \dots u_n)\,\psi\left(\frac{u_1-x_1}{k}\right)\dots\psi\left(\frac{u_\mu-x_\mu}{k}\right) du_1\, du_2 \dots du_n.$$

*) Comptes Rendus, t. CXXX (1900), pp. 1243-46. — Acta Mathematica, t. XXIV.