(m étant un paramètre arbitraire). L'équation cherchée s'obtiendra en prenant la polaire réciproque de la courbe (8) par rapport à la conique directrice (6). On retombe ainsi sur le résultat de Stieltjes.

NOUVEAUX EXEMPLES D'INTERPOLATIONS ILLUSOIRES;

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

1. L'interpolation ne peut évidemment atteindre son but que si la différence entre la fonction à représenter et le polynome entier substitué de la sorte à cette dernière tend vers zéro, en même temps que se multiplient indéfiniment les valeurs particulières de la variable pour lesquelles l'égalité numérique entre l'une et l'autre a été établie. La réalité du fait n'avait jamais soulevé l'ombre d'un doute, cela sous la seule condition que la fonction fût continue dans l'intervalle où l'on opère, quand j'ai montré la possibilité du contraire, délimité ensuite un cas étendu et bien suffisant pour la pratique, où le succès de l'interpolation est certain. [*Observations sur la légitimité de l'interpolation* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. I; 1884.)]

Ces deux constatations m'ont paru offrir un assez grand intérêt au point de vue, non seulement du problème de l'interpolation pris en lui-même, mais encore de la théorie générale des fonctions, car elles opposent une fois de plus la solidité et l'efficacité des raisonnements appuyés sur les propriétés des séries entières, à la faiblesse et à l'impuissance de ceux d'où cette considération fondamentale a été écartée. La première a pu toutefois être jugée insuffisante, le cas d'interpolation impossible que j'ai signalé étant isolé, peu normal en outre parce qu'il faut opérer dans un intervalle imaginaire spécial. Mais je viens d'apercevoir une infinité d'autres exemples du même accident, où les calculs sont faciles sans que l'on ait à sortir des conditions de l'interpolation pratique. Je vais en rapporter deux qui me paraissent être particulièrement simples et concluants.

2. En représentant par $f(x)$ une fonction supposée olotrope dans une aire donnée S_x, par

$$(1) \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

des quantités choisies arbitrairement dans cette aire, et qu'ici nous prendrons inégales; par $f_n(x)$ le polynome de degré maximum $n-1$ que déterminent les n conditions numériques

$$f_n(x_1)=f(x_1), \qquad f_n(x_2)=f(x_2), \qquad \ldots, \qquad f_n(x_n)=f(x_n);$$

en posant enfin

$$\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

on a la formule

$$(2) \qquad f(x)-f(x_n)=\omega(x)\mathcal{E}_t\frac{f(t)}{(\omega(t)(t-x))} \qquad (\textit{loc. cit.}, 8),$$

où la valeur de x est aussi intérieure à S_x, et où le résidu doit naturellement être étendu aux $n+1$ infinis (1) et x de la fonction de t qu'il concerne.

La discussion générale de cette formule est impraticable dès que le nombre n cesse d'être très petit; mais une remarque très simple la rend facile dans le cas où $f(x)$ se réduit à une fraction rationnelle. En appelant effectivement $N(x)$, $D(x)$ les deux termes de cette fraction, la fonction de t placée sous le signe $\mathcal{E}$ s'écrit

$$(3) \qquad \frac{N(t)}{D(t)\,\omega(t)(t-x)},$$

et le résidu à calculer peut évidemment être considéré comme l'excès de

$$(4) \qquad \mathcal{E}_t\frac{N(t)}{(D(t)\,\omega(t)(t-x))},$$

résidu *intégral* de cette autre fraction rationnelle, sur

$$\mathcal{E}_t\frac{N(t)}{(D(t))\,\omega(t)(t-x)},$$

somme de ses résidus partiels adhérents aux racines seulement de l'équation entière

$$D(t)=0. \tag{5}$$

Or, dès que n est assez grand pour rendre le degré effectif du dénominateur de la fraction (3) supérieur de plus d'une unité à celui du numérateur, le résidu intégral (4) s'évanouit (*loc. cit.*, 5). Dans ce cas donc, la formule (2) peut être réduite à celle-ci, maintenant très simple,

$$f(x)-f_n(x)=-\omega(x)\,\mathcal{E}_t\frac{N(t)}{[D(t)]\,\omega(t)(t-x)}. \tag{6}$$

3. Cela posé, interpolons d'abord la fraction rationnelle et réelle

$$f(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{1}{x^2+1},$$

pour les valeurs réelles de x que l'on obtient en appelant

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \ldots,\quad \xi_\nu, \tag{7}$$

ν quantités inégales toutes >0, puis en prenant $n=2\nu$ et les valeurs (1) égales à

$$\pm\xi_1,\quad \pm\xi_2,\quad \ldots,\quad \pm\xi_\nu.$$

Il vient alors

$$\omega(x)=(x^2-\xi_1^2)\ldots(x^2-\xi_\nu^2),\qquad \omega(t)=(t^2-\xi_1^2)\ldots(t^2-\xi_\nu^2),$$
$$N(t)=1,\qquad D(t)=t^2+1,$$

moyennant quoi l'équation (5) n'offre que les racines $t=\pm i$, toutes deux simples, et la formule (6) donne facilement

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{x^2+1}-f_n(x)\\ &=-(x^2-\xi_1^2)\ldots(x^2-\xi_\nu^2)\,\mathcal{E}_t\frac{1}{(t^2+1)(t^2-\xi_1^2)\ldots(t^2-\xi_\nu^2)(t-x)}\\ &=\frac{(-1)^\nu}{x^2+1}\left(\frac{x^2-\xi_1^2}{1+\xi_1^2}\cdots\frac{x^2-\xi_\nu^2}{1+\xi_\nu^2}\right).\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Si, nommant Ξ, Θ deux quantités positives quelconques dont la seconde surpasse 1, on prend maintenant toutes les quantités (7) inférieures à Ξ, puis x réelle sous la condition

$$|x| > \sqrt{\Theta + \Xi^2 + \Theta\Xi^2},$$

on aperçoit immédiatement que, dans le dernier membre des relations (8), chacun des ν facteurs du produit placé entre parenthèses est $> \Theta$, et qu'ainsi, bien loin de tendre vers 0 quand ν augmente indéfiniment, ce produit, supérieur à Θ^ν, est infini, l'excès aussi de la fonction considérée sur le polynome qui est réputé fournir sa valeur avec une approximation illimitée.

4. Nous ferons en second lieu

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{1}{x^2 - 1},$$

et, représentant par

$$(9) \qquad \xi'_1, \quad \xi'_2, \quad \ldots, \quad \xi'_{\nu'},$$

$$(10) \qquad \xi''_1, \quad \xi''_2, \quad \ldots, \quad \xi''_{\nu''},$$

deux groupes de quantités réelles, toutes comprises entre 0 et 1 *exclusivement*, nous prendrons $n = 2\nu' + 2\nu''$ et les termes

$$(11) \qquad \pm\xi'_1, \ldots, \pm\xi'_{\nu'}, \quad \pm\xi''_1, \ldots, \pm\xi''_{\nu''},$$

pour composer la suite (1).

En opérant comme ci-dessus (3), on arrive, pour $x = 0$, à

$$\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)_{x=0} - f_n(0)$$
$$= (-1)^{\nu'+\nu''+1}\left[\left(\frac{\xi'^2_1}{1-\xi'^2_1}\cdots\frac{\xi'^2_{\nu'}}{1-\xi'^2_{\nu'}}\right)\left(\frac{\xi''^2_1}{1-\xi''^2_1}\cdots\frac{\xi''^2_{\nu''}}{1-\xi''^2_{\nu''}}\right)\right],$$

puis, en valeur numérique, à l'inégalité

$$(12) \qquad \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)_{x=0} - f_n(0) > 2^{\nu''}\frac{\xi'^2_1}{1-\xi'^2_1}\cdots\frac{\xi'^2_{\nu'}}{1-\xi'^2_{\nu'}},$$

quand on assujettit chacune des quantités (10) à la condition

$$\xi > \sqrt{\frac{2}{3}},$$

donnant évidemment

$$\frac{\xi^2}{1-\xi^2} > 2.$$

Ainsi donc, on aura beau multiplier, resserrer arbitrairement les quantités (9) à l'intérieur de l'intervalle (0, 1), on n'en pourra pas moins prendre ensuite ν'' assez grand pour empêcher le second membre de l'inégalité (12) de tendre vers 0, le premier à plus forte raison, et même pour les rendre tous deux infinis. De cette manière, les valeurs (11) seront aussi nombreuses, aussi rapprochées qu'on le voudra dans l'intervalle $(-1, +1)$; jamais, pour $x = 0$, la valeur du polynome $f_n(x)$ ne justifiera le préjugé traditionnel consistant à lui attribuer pour limite la valeur correspondante de la fonction soumise à l'interpolation.

A l'exemple précédent (3), choisi de manière à faire intervenir une fonction demeurant continue pour toutes les valeurs réelles de la variable, on pourrait objecter que la valeur considérée pour x a été prise trop en dehors de l'intervalle où l'interpolation a été exécutée. Mais aucune objection de ce genre ne peut être formulée au sujet de celui-ci, puisque la valeur 0 attribuée à x est absolument centrale relativement à l'ensemble de celles prises pour éléments du calcul du polynome $f_n(x)$.