capitoli precedenti relativa-
are il seguente teorema, il
espresso al n° 6 della mia

etri $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ che lasciano
retarsi come le rappresentanti
ti in sè stessa una curva gobba
tiplo di quattro. Basta a tale
e coordinate omogenee di un
o formato dai quattro piani
nte :

$\mu)^{4k}, \quad x_4 \equiv (b\lambda - a\mu)^{4k}.$

ruppo generico, armonico od
la forma binaria biquadratica

$^2 = 0$

erosculazione.
itti i noti teoremi riguardanti
rtica gobba razionale.

EDGARDO CIANI.

SUR LA REPRÉSENTATION APPROCHÉE DES FONCTIONS.

Par M. **Henri Lebesgue** (Poitiers).

(Extrait d'une Lettre adressée à M. E. LANDAU).

Adunanza dell'8 marzo 1908.

Mon cher Collègue,

Je me félicite de m'être rencontré avec vous sur un point particulier; je possède en effet depuis plus de deux ans la démonstration de la proposition qui figure au § 1 de votre article: *Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion* [1]); mais mes recherches sur ce point étant loin d'être terminées, je ne les ai pas publiées. Voici quelles considérations m'avaient conduit à ce résultat.

De toutes les démonstrations qu'on a données du théorème de WEIERSTRASS, qui vous occupe, les seules je crois qui permettent d'écrire *effectivement,* à l'aide d'un symbole f de fonction continue, une fonction analytique représentant f avec une approximation donnée sont: celle de WEIERSTRASS basée sur la considération de l'intégrale

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-n^2(t-x)^2}\, dt;$$

celle de M. PICARD reposant sur les propriétés de l'intégrale de POISSON

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\, dt;$$

et celle de M. FEJÉR déduite de l'étude de l'intégrale

$$\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\frac{\sin n\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right]^2 dt.$$

Or l'étude de ces diverses intégrales se fait par le même procédé et repose évidemment sur cette propriété relative aux intégrales singulières de fonctions positives:

Soit $f(x)$ une fonction bornée uniformément continue dans l'intervalle $(a, a+l)$ et soit $\varphi(\alpha, n)$ une fonction de la variable continue α et du paramètre continu ou discontinu n satisfaisant aux conditions suivantes:

1. *$\varphi(\alpha, n)$ est définie et positive, ou du moins non négative, dans l'intervalle $(-l, +l)$.*

[1]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tome XXV (1er semestre 1908), pp. 337-345.

2. *Quels que soient b et c, pourvu que l'on ait*

$$-l \leqq b < 0 < c \leqq +l,$$

l'intégrale

$$\int_b^c \varphi(\alpha, n)\, d\alpha$$

existe et tend vers 1, *quand n croît indéfiniment.*

Alors, quand n croît indéfiniment, l'intégrale

$$I_n = \int_a^{a+l} f(t)\varphi(t-x, n)\, dt$$

tend uniformément vers $f(x)$ dans tout intervalle $(a_1, a_1 + l_1)$ intérieur à $(a, a+l)$.

De ce théorème on déduira autant d'expressions analytiques approchées de f qu'on le voudra. Si, par exemple, on veut des polynômes approchés, on pourra prendre pour φ un polynôme. Le plus simple, si l'intervalle $(a, a+l)$ est l'intervalle $(0, 1)$, est le polynôme $P_n(\alpha) = \varphi(\alpha, n) = k_n(1-\alpha^2)^n$, k_n étant tel que $\int_{-1}^{+1} P_n(\alpha)\, d\alpha$ tende vers 1. Ce qui conduit à prendre,

$$\text{soit} \quad k_n = \frac{3.5.7 \ldots (2n+1)}{2.2.4.6 \ldots (2n)}, \quad \text{soit} \quad k_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}},$$

d'où le théorème que vous indiquez.

Il est évident que si f est fonction continue d'un paramètre λ, I_n est fonction continue du même paramètre. On en déduit que, dans le calcul de I_n, on pourrait remplacer f par une fonction f_n tendant uniformément vers f, quand n croît, sans modifier la convergence uniforme de I_n vers f. En particulier, marquons dans $(a, a+l)$ des valeurs

$$a_0 = a < a_1 < a_2 \ldots < a_{p-1} < a_p = a + l$$

et prenons pour f_n soit la fonction continue égale à f pour toutes ces valeurs et linéaire entre deux d'entre elles, soit la fonction discontinue constante dans chaque (a_i, a_{i+1}) et égale à f à l'origine de chacun de ces intervalles, soit toute autre fonction de même nature; alors *l'intégrale I_n nous fournit une fonction d'interpolation qui, quand chaque (a_i, a_{i+1}) tend vers zéro, tend uniformément vers f.* MM. RUNGE et BOREL ont montré que la formule d'interpolation de LAGRANGE ne possédait pas cette propriété. Il serait d'ailleurs facile de mettre I_n sous la forme qu'indique M. BOREL pour les formules d'interpolation permettant à coup sûr l'approximation indéfinie [2]).

---

[2]) RUNGE, *Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten* [Zeitschrift für Mathematik und Physik, tome XLVI (1901), pp. 224-243], p. 229. — BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes,* chap. IV, pp. 74-82.

NOTE ADDITIONNELLE. — Sur les indications de M. LANDAU je me suis reporté à divers travaux de M. MÉRAY sur la formule d'interpolation de LAGRANGE : *Observations sur la légitimité de l'interpolation* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3e série, tome I (1884), pp. 165-176];

Dans l'énoncé que j'ai indiqué plus haut on peut remplacer les conditions 1 et 2 par les suivantes :

1'. *$\varphi(\alpha, n)$ est définie dans $(-l, +l)$.*

2'. *Quels que soient b et c, pourvu que l'on ait*

$$-l \leqq b < 0 < c \leqq +l,$$

les intégrales

$$\int_b^c \varphi(\alpha, n)\, d\alpha, \qquad \int_{-l}^{b} |\varphi(\alpha, n)|\, d\alpha, \qquad \int_c^{+l} |\varphi(\alpha, n)|\, d\alpha$$

tendent respectivement, quand n croît indéfiniment, vers 1, 0 et 0.

Il est d'ailleurs facile de prouver que : *si $\varphi(\alpha, n)$ ne satisfait pas à la fois aux conditions 1' et 2', il est toujours possible de trouver une fonction continue f telle que l'intégrale I_n diverge pour une valeur donnée de x dans $(a, a+l)$ ou ne converge pas uniformément autour de cette valeur.*

C'est la généralisation de ce que j'ai indiqué dans mes Leçons sur les séries trigonométriques aux §§ 45 à 47 ; j'ai d'ailleurs déjà fait allusion à cette généralisation (Comptes Rendus, 17 novembre 1905).

Les intégrales I_n permettent d'aborder des recherches telles que celle-ci : f étant une fonction continue d'une certaine famille, par exemple satisfaisant à une condition de LIPSCHITZ

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| < k,$$

avec des polynômes de quel degré peut-on la représenter avec une approximation donnée ?

Les réponses à ces questions compléteraient le théorème de WEIERSTRASS. Quand on essaie d'y répondre on est naturellement conduit à rechercher quelles sont les fonc-

---

Nouveaux exemples d'interpolations illusoires [Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série, tome XX (1896), Ie Partie, pp. 266-270].

Dans ce dernier travail M. MÉRAY a prouvé, avant MM. RUNGE et BOREL, que l'interpolation ne permettait pas nécessairement l'approximation indéfinie. Par exemple, au § 4, M. MÉRAY montre que si l'on applique la formule de LAGRANGE pour la représentation de $\frac{1}{1-x^2}$ dans un intervalle $(-\alpha, +\alpha)$ tel que l'on ait $\sqrt{\frac{2}{3}} < \alpha < 1$, en utilisant des valeurs équidistantes de x *et d'autres valeurs de x convenablement choisies,* on n'obtenait pas de polynômes d'approximation.

MM. RUNGE et BOREL s'astreignent, au contraire, à n'utiliser que des valeurs équidistantes de x et non des valeurs de x choisies exprès pour que l'approximation ne soit pas indéfinie. La différence entre les deux résultats est nettement mise en évidence par ce qui suit : Contrairement à ce que croyait M. MÉRAY, on s'était déjà demandé, avant ses travaux, si l'interpolation fournissait bien une approximatione indéfinie. HEINE {*Eine Anwendungen der Residuenrechnung von* CAUCHY [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXXIX (1880), pp. 19-39]} avait démontré, à l'aide d'une méthode analogue à celle de M. MÉRAY, qu'il en était bien ainsi lorsque l'on n'emploie que des valeurs équidistantes de x et que l'intervalle dans lequel on interpolle la fonction (supposée analytique) est contenu dans l'intervalle de convergence de cette fonction ; or, dans l'exemple de M. MÉRAY, ces conditions sont remplies.

tions $\varphi(x, n)$ les mieux appropriées à la représentation de la famille de fonctions considérées; mais, sans effectuer cette recherche, en prenant des intégrales I_n particulières on a déjà quelques renseignements.

Par exemple, l'intégrale I_n que vous avez considérée prouve que, *f satisfaisant à une condition de* LIPSCHITZ, *on peut, avec un polynôme de degré n représenter f à moins de η et cela de manière que, quand n croit indéfiniment, $n\eta^6$ tende vers une limite finie.* Ce résultat est identique à celui qu'on peut déduire d'une formule d'approximation de M. POTRON [3]); en prenant les polynômes d'approximation auxquels conduit la méthode de WEIERSTRASS, on obtient un résultat meilleur : *on peut faire en sorte que $\dfrac{n\eta^2}{Ln}$ tende vers une limite finie.*

Poitiers, le 24 février 1908.

H. LEBESGUE.

---

3) *Sur une formule générale d'interpolation* [Bulletin de la Société Mathématique de France, tome XXXIV (1906), pp. 52-60].