

Über Tchebycheffsche Annäherungsmethoden*).

Von

PAUL KIRCHBERGER in Weilburg an der Lahn.

Inhalt.

	Seite
I. Einleitung	509
II. Die Grundgedanken der Theorie	511
III. Ein Hilfssatz	515
§ 1. Polyeder.	516
§ 2. Konvexe Polyeder	520
§ 3. Anordnung zu konvexen Polyedern.	524
§ 4. Trennung zweier konvexen Polyeder	528
§ 5. Zerlegung in Elementarpolyeder	530
§ 6. Auswahl der $(n+2)$ Punkte bei Unmöglichkeit der Trennung . .	533
IV. Aufstellung der Annäherungsfunktion	535

I. Einleitung.

Mit dem Begriff der Funktion ist das Postulat der numerischen Berechnung der Funktionswerte für irgendwelche Werte der unabhängigen Variablen gegeben. Da aber die vier elementaren Spezies der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, oder streng genommen nur die ersten drei derselben, die einzigen numerisch ausführbaren Rechnungsarten, alle andern aber nur insoweit durchführbar sind, als sie sich auf diese zurückführen lassen, so folgt hieraus, daß wir sämtliche Funktionen nur insoweit numerisch beherrschen, als sie sich durch rationale Funktionen ersetzen, d. h. angenähert darstellen lassen. Hieraus erhellt die große Bedeutung der Annäherungsprobleme für die gesamte Mathematik und die ausgezeichnete Stellung, die die Probleme der Annäherung durch rationale oder ganze rationale Funktionen einnehmen. In der Tat setzt,

*) Diese Arbeit ist ein Auszug aus der Inaugural-Dissertation des Verfassers, Göttingen 1902.

wenigstens für die numerische Berechnung, jede Annäherung durch andere, z. B. trigonometrische, Funktionen die annäherungsweise Ersetzbarkeit dieser Funktionen durch rationale voraus.

Die sämtlichen Probleme der Annäherung können wir von verschiedenem Gesichtspunkt aus einteilen. Die *verschiedene Natur der anzunähernden Funktion*, die entweder stetig sein, oder auch aus diskreten Wertepaaren bestehen kann, läßt die eigentlichen Annäherungsprobleme und die Interpolationsprobleme unterscheiden. Ferner können wir einteilen nach der *Art der annähernden Funktion*, die ein Polynom, eine rationale oder eine transcendente Funktion sein kann. Vor allem aber können wir nach der Natur der Annäherung selber, d. h. nach dem *Gesichtspunkt, von dem aus die gesuchte Funktion als die am besten annähernde betrachtet werden soll*, verschiedene Gruppen von Problemen unterscheiden. Es kann ein bestimmter *Punkt bevorzugt* und hier z. B. in der Übereinstimmung möglichst vieler Ableitungen das Kriterium der besten Annäherung gesehen werden, wie dies bei den abgebrochenen Potenzreihen und Kettenbrüchen der Fall ist. Es kann aber auch *ein ganzes Intervall gleichberechtigt erscheinen*. Dann können entweder alle gemachten Fehler gleichmäßig berücksichtigt werden, indem verlangt wird, daß die Summe ihrer absoluten Beträge, die Summe ihrer Quadrate u. s. w. möglichst klein sei. Dies führt, wenn die anzunähernde Funktion stetig ist, auf ein Problem der Variationsrechnung. Oder aber, es kann gefordert werden, *daß der größte Fehler*, der bei der Ersetzung der anzunähernden Funktion durch die annähernde gemacht wird, *möglichst klein sei*.

Dies letzte Kriterium wurde zuerst von Poncelet aufgestellt und von Tchebychef*) systematisch ausgearbeitet.

Vergleichen wir diese Methode mit der gewöhnlichen, nach der Potenzreihen nach einer endlichen Anzahl Glieder abgebrochen werden, so leuchtet sofort ein Vorzug der Tchebychef'schen Methode ein: Jede Annäherung hat nur Sinn in einem endlichen Intervall, und in einem solchen erfüllen die abgebrochenen Potenzreihen keine Minimalbedingung. Die Tchebychef'sche Methode hat dagegen den Nachteil, daß bei ihr der Grad der annähernden Funktion fest vorgeschrieben sein muß, es also nicht, wie bei den Potenzreihen, möglich ist, durch Erhöhung des Grades mit Benutzung des vorangegangenen Resultates eine Besserung der Annäherung zu erzielen.

Im folgenden soll die von Tchebychef für Funktionen einer Variablen aufgestellte Theorie auf Funktionen mehrerer Variablen übertragen werden.

*) Tchebychef, Oeuvres complètes, herausgegeben von Markoff und Sonin, Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions und Theorie des mécanismes connus sous le nom de parallelogrammes.

Dabei soll nicht, wie bei Tchebychef, von der Annäherung stetiger Funktionen, sondern vom Interpolationsproblem ausgegangen werden, wodurch die ganze Theorie eine andere Gestalt gewinnt.

Im nächsten Abschnitt werden wir uns das Wesentliche des Verfahrens durch einige anschauliche wenn auch nicht strenge Erwägungen klar zu machen haben, in den folgenden Abschnitten folgt dann der abstrakte und strenge Beweis.

Die vorliegende Arbeit ist aus einem Vortrag im Seminar des Herrn Professor Hilbert entstanden. Auch weiterhin hat ihr Herr Professor Hilbert sein freundliches Interesse bewahrt und seine Ratschläge waren mehrfach von durchgreifendem Erfolg begleitet. Ich sage ihm dafür auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank.

II. Die Grundgedanken der Theorie.

Unter einer Tchebycheffschen Annäherung einer beliebigen gegebenen Funktion $\varphi(x)$ durch ein Polynom n^{ten} Grades $f_n(x)$ in einem gegebenen Intervall verstehen wir die Annäherung durch diejenige Funktion $f_n(x)$, die das Maximum von

$$|f_n(x) - \varphi(x)|$$

im gegebenen Intervall möglichst klein macht. Es sei das Maximum des absoluten Betrages der Differenz „Abweichung“ genannt und mit L bezeichnet; es ist dann L eine Funktion der Koeffizienten von $f_n(x)$

$$L = L(p_0, p_1, \dots, p_n)$$

wenn etwa

$$f_n(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0.$$

Die p sollen so bestimmt werden, daß L ein Minimum wird.

Man überzeugt sich leicht von der Existenz dieses Minimums. L ist eine stetige Funktion der p . Denn eine genügend kleine Änderung der p hat an jeder Stelle des Intervalls eine beliebig kleine Änderung von $f_n(x)$, daher auch des Maximums von

$$|f_n(x) - \varphi(x)|$$

zur Folge. Hierbei braucht Stetigkeit von $\varphi(x)$ nicht vorausgesetzt zu werden, nur Eindeutigkeit und Endlichkeit von $\varphi(x)$ müssen wir verlangen, damit die Definition von L ihren Sinn nicht verliert. Hingegen wollen wir Fälle, in denen $\varphi(x)$ für endliche Teile des Intervalls nicht definiert ist, nicht ausschließen.

Stetige Funktionen nehmen im Endlichen stets ihr Minimum an, wir haben demnach nur das Unendliche auszuschließen. Es ist zu zeigen,

daß L beliebig groß wird, wenn eins der Argumente p über alle Grenzen wächst. Dies können wir statt von L auch von dem Maximum von $|f_n(x)|$ nachweisen, da dies sich ja nur um eine endliche Größe, deren größter möglicher Betrag bekannt ist, von L unterscheidet. Betrachten wir die Wurzeln von $x^{n+1} + f_n(x) = 0$, so wird mindestens eine derselben beliebig groß, wenn einer oder mehrere Koeffizienten von $f_n(x)$ wachsen, wie dies aus dem Zusammenhang zwischen Wurzeln und Koeffizienten einer Gleichung folgt. Denken wir uns $x^{n+1} + f_n(x)$ in Faktoren zerlegt, so ist klar, daß das Produkt an mindestens einer Stelle des Intervalls über alle Grenzen wachsen muß, wenn eine oder mehrere Wurzeln genügend groß werden. $|f_n(x)|$ kann aber nur um eine bestimmt angebbare Zahl kleiner sein als $|x^{n+1} + f_n(x)|$. Hieraus folgt dann die Existenz des Minimums von

$$L = L(p_0, p_1, \dots, p_n).$$

Der hier angedeutete Existenzbeweis läßt sich auch auf den Fall ausdehnen, daß die annäherungsweise Darstellung einer Funktion mehrerer Variablen verlangt wird, etwa die Annäherung von $\varphi(x, y)$ durch

$$f_n(x, y) = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} y + \dots + p_{n-1} y + p_n$$

in einem gegebenen Intervall. Auch hier ist nur zu zeigen, daß das Maximum von $|f_n(x, y)|$ im gegebenen Intervall mit jedem der Koeffizienten p zugleich unendlich wird. Schreiben wir:

$$f_n(x, y) = Cx^n + g_1(y)x^{n-1} + g_2(y)x^{n-2} + \dots + g_n(y),$$

so sind die Koeffizienten von $f_n(x, y)$ auch die Koeffizienten der $g(y)$. Das Maximum jeder Funktion $g(y)$ wird beliebig groß, wenn einer ihrer Koeffizienten hinreichend wächst. Halten wir diesen Wert von y fest und betrachten nun $f_n(x, y)$ als Funktion von x , so wird alsdann einer ihrer Koeffizienten, also nach dem Vorgegangenen auch ihr Maximum beliebig groß.

Nach dieser Methode läßt sich der Existenzbeweis der Annäherungsfunktion bei beliebig vielen Variablen führen. Von der gegebenen anzunähernden Funktion ist dabei nur Eindeutigkeit und Endlichkeit vorausgesetzt. Den im folgenden zu behandelnden Fall des Interpolationsproblems, bei dem diskrete Wertsysteme durch rationale Funktionen angenähert werden sollen, können wir als speziellen Fall des Problems begreifen, bei dem φ nur an diskreten Stellen definiert ist.

Nehmen wir etwa zwei unabhängige Variable und machen wir uns das Wesentliche des Problems an einem möglichst einfachen Beispiel geometrisch klar. Es seien eine Anzahl Punkte im Raum

$$(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), \dots, (x_n y_n z_n), \dots$$

gegeben und diejenige Ebene

$$z = a_1 x + a_2 y + a_3$$

gesucht, die die größte der Differenzen $z - z_v$ die „Abweichung“ absolut genommen möglichst klein macht. Es fragt sich: an wievielen der gegebenen Punkte nimmt $|z - z_v|$ die Abweichung an, und welches ist dabei das Vorzeichen von $z - z_v$? Die Abweichung wird an mindestens vier Punkten angenommen; denn nehmen wir an, sie würde nur an etwa drei Punkten angenommen, so könnten wir, da wir durch drei Punkte stets eine Ebene legen können, uns die betrachtete Ebene an den Stellen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ und $x_3 y_3$, an denen die Abweichung angenommen wird, nach dem gegebenen Punkt hin verschoben denken, wodurch sich an diesen Stellen die Differenz $z - z_v$ verkleinern würde. An den andern Stellen könnte sie sich zwar vergrößern, sie würde jedoch bei hinreichend geringfügiger Verschiebung der Ebene das Maximum ihres Betrags, das nur bei $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ angenommen wird, noch nicht erreichen. Die Abweichung könnte also noch verkleinert werden.

Betrachten wir nun das Vorzeichen von $z - z_v$; die Projektionen derjenigen Punkte $x y z$ auf die xy Ebene, bei denen $z - z_v = +L$, seien mit p , die der Punkte, bei denen $z - z_v = -L$, seien mit \bar{p} bezeichnet. Es sei zunächst

$$z = a_1 x + a_2 y + a_3$$

noch nicht die gesuchte Ebene, vielmehr sei die Abweichung einer andern Ebene, etwa

$$\bar{z} = \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y + \bar{a}_3$$

kleiner. Man sieht, daß

$$z - \bar{z} = (a_1 - \bar{a}_1) x + (a_2 - \bar{a}_2) y + (a_3 - \bar{a}_3)$$

an den Punkten p positiv, an den Punkten \bar{p} negativ ist.

$$(a_1 - \bar{a}_1) x + (a_2 - \bar{a}_2) y + (a_3 - \bar{a}_3) = 0$$

ist die Gleichung einer Geraden auf der xy Ebene, die die Projektionen p von den \bar{p} so trennt, daß die p auf der einen, die \bar{p} auf der andern Seite liegen. Umgekehrt sieht man auch leicht, daß, wenn eine derartige Trennungslinie existiert, die betrachtete Ebene nicht die am besten annähernde sein kann. Denn ist etwa $z = f(x, y)$ die betrachtete Ebene, $\bar{f}(x, y) = 0$ die Trennungslinie, so hat

$$f(x, y) - \lambda \bar{f}(x, y)$$

bei genügend kleinem λ eine kleinere Abweichung als $f(x, y)$.

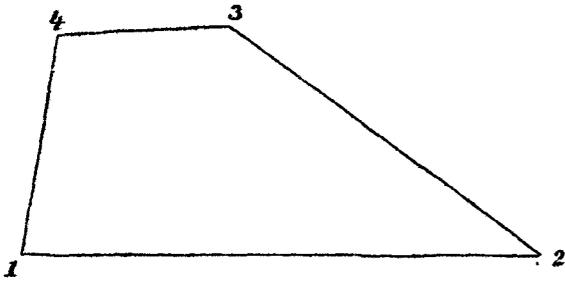
Hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß

$$z = a_1 x + a_2 y + a_3$$

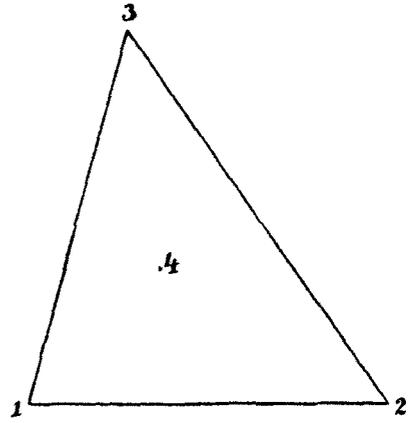
die gegebenen Punkte am besten annähert, ist die, daß sich die Projektionen der Punkte, an denen die Abweichung im einen Sinn angenommen wird,

von den Projektionen der Punkte, an denen die Abweichung im andern Sinn angenommen wird, nicht durch eine Gerade trennen lassen.

Wird die Abweichung an vier Punkten angenommen, so sind für die Lage ihrer Projektionen zwei Typen möglich. Die vier Punkte können ein konvexes Viereck bilden, oder es kann einer in einem von den übrigen gebildeten Dreieck liegen. Im ersten Fall müssen 1 und 3 Punkte p



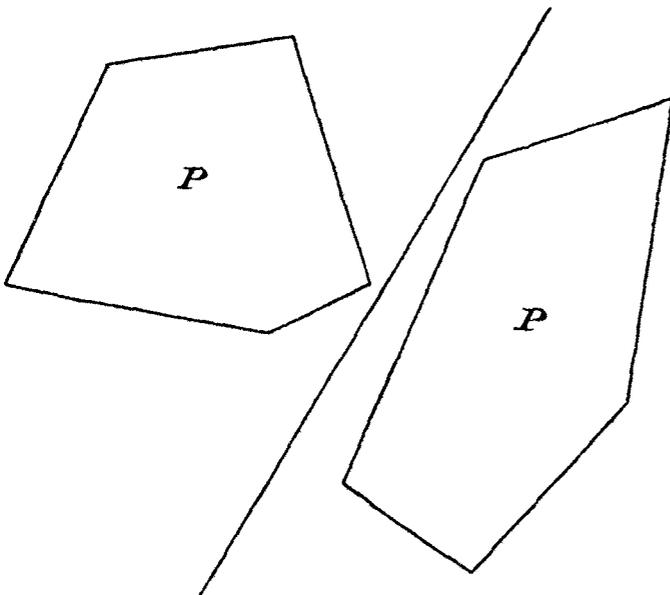
1. Typus



2. Typus

2 und 4 Punkte \bar{p} (oder umgekehrt), im zweiten 1, 2, 3 Punkte p , 4 ein Punkt \bar{p} (oder umgekehrt) sein, wenn Untrennbarkeit durch eine Gerade statthaben soll.

Es fragt sich, ob wir auch auf diese beiden Typen geführt werden, wenn die Abweichung an mehr als vier Punkten angenommen wird. Das

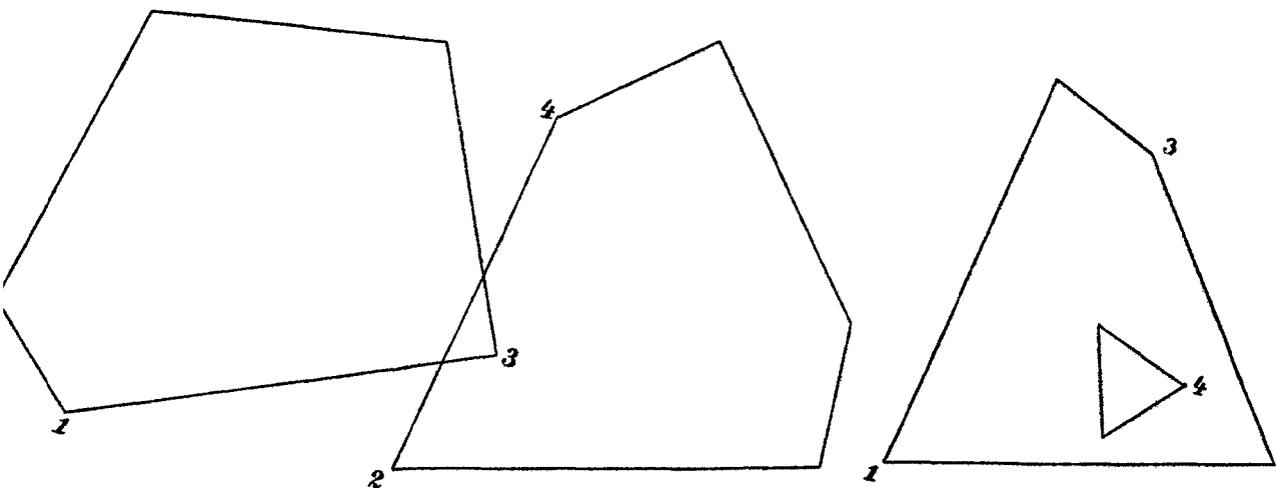


ist nun in der Tat der Fall.

Wir denken uns alle Punkte p zu einem konvexen Polygon P so angeordnet, daß alle Eckpunkte von P Punkte p sind und alle Punkte p entweder Eckpunkte von P sind, oder im Innern liegen; wir können uns z. B. um die Punkte p einen Gummifaden gelegt denken. Ebenso vereinigen wir die Punkte \bar{p} zu einem konvexen Polygon \bar{P} . Nun dürfen die Polygone nicht getrennt voneinander

liegen, weil sie sonst durch eine Gerade trennbar wären. Liegen sie aber nicht getrennt voneinander, so muß entweder eine Seite des einen eine Seite des andern durchschneiden, und dann können wir diese beiden Seiten

als die Diagonalen des Vierecks des ersten Typus betrachten, oder es muß ein Eckpunkt des einen Polygons innerhalb des andern Polygons liegen; dann muß er auch innerhalb eines Dreiecks liegen, das von den Eckpunkten des zweiten Polygons gebildet wird, und dann werden wir auf den zweiten Typus geführt.



Dies bedeutet: Ist eine Anzahl Punkte gegeben und die „Annäherungsebene“ dieser Punkte gesucht, so gibt es unter ihnen vier Punkte derart, daß die Annäherungsebene dieser vier Punkte auch die Annäherungsebene aller Punkte ist.

Wir wollen nun diese Gedanken auf den allgemeinen Fall übertragen und streng beweisen. Wir schließen zunächst an die letzten Bemerkungen an.

III. Ein Hilfssatz.

Es seien

$$x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(n)}$$

unabhängige reelle Variable; ein System von speziellen Werten

$$x_1^{(1)} x_1^{(2)} \dots x_1^{(n)}$$

nenne ich einen Punkt. Es seien eine Anzahl Punkte p_1, p_2, p_3, \dots und hiervon verschiedene Punkte $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \dots$ gegeben. Es handelt sich darum, ob es möglich sei, eine lineare Funktion

$$a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \dots + a_n x^{(n)} + a_n$$

anzugeben, die an allen Punkten p positive und an allen Punkten \bar{p} negative Werte annimmt. Unser Satz lautet nun:

Entweder ist es möglich eine solche lineare Funktion anzugeben,

Oder man kann aus den gegebenen Punkten $n + 2$ Punkte von der Art auswählen, daß schon sie allein die Existenz einer solchen linearen Funktion unmöglich machen.

§ 1.

Polyeder.

Aus $n + 1$ Punkten, d. h. speziellen Wertsystemen der Variablen $x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(n)}$ können wir eine Determinante der Form bilden:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & \dots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \dots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & x_{n+1}^{(3)} & \dots & x_{n+1}^{(n)} & 1 \end{vmatrix}.$$

Sie sei kurz mit dem Symbol

$$|1, 2, 3, \dots, n, n + 1|$$

bezeichnet. *Ein System von n Punkten*

$$(1, 2, 3, \dots, n)$$

d. h. die Matrix von $n + 1$ Spalten und n Zeilen sei eine „Wandung“, ein System von $(n - 1)$ Punkten

$$\{1, 2, 3, \dots, n - 1\}$$

ein „Rand“ genannt. Die Anordnung der Elemente dieser Symbole ist nur insoweit bestimmt, daß ich Symbole, die durch eine gerade Zahl von Transpositionen ineinander übergeführt werden können, als identisch betrachten will.

Sind zwei Punkte a und b gegeben,

$$x_a^{(1)} x_a^{(2)} \dots x_a^{(n)}$$

und

$$x_b^{(1)} x_b^{(2)} \dots x_b^{(n)},$$

so spreche ich von der Linie (ab) und verstehe darunter die Gesamtheit der Punkte, die $(n - 1)$ unabhängigen linearen Gleichungen

$$p_1^{(1)} x^{(1)} + p_1^{(2)} x^{(2)} + \dots + p_1^{(n)} x^{(n)} + p_1^{(n+1)} = 0,$$

$$p_2^{(1)} x^{(1)} + p_2^{(2)} x^{(2)} + \dots + p_2^{(n)} x^{(n)} + p_2^{(n+1)} = 0,$$

\vdots

$$p_{n-1}^{(1)} x^{(1)} + p_{n-1}^{(2)} x^{(2)} + \dots + p_{n-1}^{(n)} x^{(n)} + p_{n-1}^{(n+1)} = 0$$

genügen, wo diese Gleichungen nur der Bedingung unterworfen sind, daß sie von a und b befriedigt werden. Man sieht, daß es auf die Wahl der p dabei nicht ankommt. Denn die $n - 1$ Gleichungen definieren die Unbekannten als lineare Funktionen eines Parameters t

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= L_1^{(1)} t + L_0^{(1)}, \\ x^{(2)} &= L_1^{(2)} t + L_0^{(2)}, \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= L_1^{(n)} t + L_0^{(n)}, \end{aligned}$$

wo t eine der Variablen x oder eine lineare Funktion derselben bedeuten kann. Nach Definition von t bestimmen sich die L durch

$$\begin{aligned} x_a^{(1)} &= L_1^{(1)} t(a) + L_0^{(1)}, \\ x_b^{(1)} &= L_1^{(1)} t(b) + L_0^{(1)} \end{aligned}$$

unabhängig von den Werten der p .

Man sieht nun sofort: Habe ich eine Wandung $(1, 2, \dots, n)$ und einen Punkt p , der der Bedingung genügt, auf einer gegebenen Linie (ab) zu liegen, so ist die Determinante $|1, 2, \dots, n, p|$ eine lineare Funktion des Parameters der Linie (ab) . Hiervon werden wir öfters Gebrauch zu machen haben.

Wenn $n + 1$ Punkte $1, 2, 3, \dots, n + 1$ gegeben sind, die

$$|1, 2, 3, \dots, n + 1| > 0$$

genügen, so nenne ich das System der Wandungen

$$\begin{aligned} (1, 2, \dots, n - 1, n), \quad (-1)(1, 2, \dots, n - 1, n + 1), \\ (1, 2, \dots, n - 2, n, n + 1) \dots \dots (-1)^n (2, 3, \dots, n, n + 1) \end{aligned}$$

ein Elementarpolyeder. Das System dieser Wandungen hat die Eigenschaft, daß, wenn ich jede Wandung mit einem Punkte p zur Bildung einer Determinante zusammennehme, die Summe dieser Determinanten von der Wahl des Punktes p unabhängig ist.

$$(1) \quad |wp| + |w'p| + |w''p| + \dots = \text{const.},$$

wo p einen beliebigen Punkt bedeutet. Diese Summe ist nämlich gleich $|1, 2, 3, \dots, n + 1|$, sodaß die Gleichung besteht:

$$(2) \quad |1, 2, 3, \dots, n + 1| + (-1)|1, 2, \dots, n, p| + (-1)^2|1, 2, \dots, n - 1, n + 1, p| \\ + \dots + (-1)^{n+1}|2, 3, \dots, n + 1, p| = 0.$$

Für alle kleineren Werte von n sei die Gleichung bewiesen. Ich nehme nun auf der linken Seite von (2) den Koeffizienten einer Variablen, etwa den von $x^{(n)}$. In $|1, 2, \dots, n + 1|$ kommt $x^{(n)}$ nicht vor; in $(-1)|1, 2, \dots, n, p|$ d. h. in

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \\ x^{(1)} & x^{(2)} & \dots & x^{(n)} & 1 \end{vmatrix}$$

ist der Koeffizient gleich:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n-1)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n-1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix},$$

welche Determinante wir mit $|\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}|$ bezeichnen wollen, um anzudeuten, daß der Punkt $\bar{1}$ eine Koordinate, nämlich $x^{(n)}$ weniger enthält als 1, also in einem niedriger dimensionalen Raume liegt. Auf diese Weise bestimmt sich der Koeffizient von $x^{(n)}$:

$$|\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}| + (-1) |\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}, \overline{n+1}| + \dots + (-1)^{n-1} |\bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{n+1}|;$$

dies ist die linke Seite der Gleichung (2) für den niedriger dimensionalen Raum; p hat hier den Wert $n+1$. Der Koeffizient von $x^{(n)}$ in (2) verschwindet, und dasselbe können wir von den andern Variablen nachweisen. Zur Betrachtung des absoluten Gliedes setzen wir alle Variablen in (2) gleich Null. Der zweite Term von (2) $(-1) |1, 2, \dots, n, p|$ hat dann den Wert

$$(-1) \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Das erste Glied von (2) lautet:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & \dots & x_{n+1}^{(n)} & 1 \end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir nach den Elementen der letzten Spalte, so liefert das letzte Element eine Determinante, die sich gegen die vorige gerade weghebt, und ebenso heben sich die übrigen Determinanten der Entwicklung von $|1, 2, \dots, n+1|$ gegen die folgenden Terme der linken Seite von (2). Da (2) für $n=1$ gilt, ist sie hierdurch allgemein bewiesen.

Die Bildung der Elementarpolyeder aus $n+1$ Punkten können wir folgendermaßen vornehmen: Wir wollen die n Punkte $1, 2, \dots, n$ als Wandung auffassen und mit w bezeichnen. $n-1$ Punkte in solcher An-

ordnung, daß der n^{te} Punkt, hinter sie gesetzt, w ergibt, wollen wir einen Rand nennen, der in w enthalten ist, z. B.

$$\{1, 2, \dots, n-1\} = r'.$$

Dagegen $n-1$ Punkte, die, wenn wir den n^{ten} Punkt hinter sie setzen, $-w$ ergeben, wollen wir mit (-1) multiplizieren und alsdann einen Rand nennen, der in w enthalten ist, z. B.

$$-\{1, 2, \dots, n-2, n\} = r''.$$

Wir können jetzt, wenn wir p statt $(n+1)$ einsetzen, sagen: Ein Elementarpolyeder wird gebildet von den Wandungen

$$w \text{ und } -(rp)$$

wo r alle Ränder von w durchlaufen muß, oder von

$$-w \text{ und } (rp)$$

je nachdem

$$|wp| > 0 \text{ oder } -|wp| > 0.$$

Nehmen wir den ersten Fall an; es sei ferner q ein Punkt, der $-|wq| > 0$ genügt. Ich bilde das Elementarpolyeder $-w, (rq)$, nehme das System dieser Wandungen mit dem früheren zusammen und lasse w gegen $-w$ weg. Man sieht, daß dabei die Gleichung (1) erhalten bleibt. Das neue System von Wandungen nennen wir ein Polyeder. Allgemein verstehen wir unter einem Polyeder ein System von Wandungen, das gebildet wird aus den Wandungen einer endlichen Anzahl von Elementarpolyedern unter Weglassung gleicher und entgegengesetzter Wandungen. Ein in den Wandungen vorkommender Punkt $1, 2, 3, \dots$ heiße ein Eckpunkt.

Für die Polyeder gilt demnach Gleichung (1)

$$|wt| + |w't| + |w''t| + \dots = \text{const.},$$

wo t irgend einen Punkt bedeutet. Die linke Seite heiße der Inhalt des Polyeders; man sieht, daß sich bei dem Aufbau der Polyeder aus Elementarpolyedern der Inhalt additiv zusammensetzt; danach haben alle Polyeder positiven Inhalt.

In jedem Polyeder kommt jeder Rand, der vorkommt, eine gerade Anzahl Male vor, und zwar gleich oft in dem einen und dem entgegengesetzten Sinne. Man sieht zunächst, daß dieser Satz für Elementarpolyeder gilt; gilt er nun für irgend ein Polyeder, so gilt er auch für jedes Polyeder, das aus dem ersten durch Zufügung eines Elementarpolyeders entsteht, sowie für jedes, das durch Weglassung zweier gleichen und entgegengesetzter Wandungen entsteht. Somit gilt er allgemein.

§ 2.

Konvexe Polyeder.

Unter konvexen Polyedern verstehen wir Polyeder, die der folgenden Bedingung genügen:

Irgend eine Wandung w des Polyeders muß, mit jedem in ihr nicht enthaltenen Eckpunkt p zusammengesetzt, eine nicht negative Determinante ergeben

$$|wp| \geq 0.$$

Unsere Elementarpolyeder mit den Wandungen w und $-(rp)$ genügen der Bedingung, da $|wp| > 0$. Denn sei etwa a der nicht in r vorkommende Punkt von w , so kann die Wandung $-(rp)$ nur noch mit a zusammengesetzt werden, und es ist

$$-|rpa| > 0, \text{ da } |rap| = |wp| > 0.$$

Wir führen einen neuen Begriff ein: *Wir wollen von einem Punkte i sagen, er liege „innerhalb“ des von den Wandungen w, w', w'', \dots gebildeten konvexen Polyeders, wenn*

$$|wi| \geq 0, \quad |w'i| \geq 0, \quad |w''i| \geq 0, \dots$$

Wenn nicht immer das Ungleichheitszeichen, sondern ein oder mehrere Male das Gleichheitszeichen gilt, so wollen wir sagen, der Punkt liege auf der Begrenzung des konvexen Polyeders. Ebenso wollen wir sagen, er liege innerhalb der Wandung w , wenn $|wi| = 0$ und $|w'i| \geq 0 \dots$ und auf der Begrenzung der Wandung w , wenn auch außer $|wi| = 0$ noch Gleichheitszeichen gelten.

Wir wollen zeigen, daß ein Punkt, der innerhalb der Wandung w liegt, dies unabhängig davon tut, zu welchem Elementarpolyeder w gehört. Es sei wp ein Elementarpolyeder, $|wp| > 0$ und p' irgend ein Punkt, der $|wp'| > 0$ genügen soll. Der Punkt i liege in Bezug auf wp innerhalb w , sodaß $|wi| = 0$, die übrigen Determinanten positiv sind. Wir wollen zeigen, daß er auch in Bezug auf das Elementarpolyeder wp' innerhalb w liegt. Sei $-r$ ein in w enthaltener Rand, a der nicht zu r gehörende Eckpunkt von w , $w = -(ra)$, so ist (rp) eine von den andern Wandungen des Polyeders wp ; es sei also $|rpi| > 0$ und es genügt nachzuweisen, daß $|rp'i| > 0$.

Wir verfolgen $|rat|$, während der Punkt t auf der Linie (pp') läuft. Den Grenzfall, wo diese lineare Funktion sich auf eine Konstante reduziert, behandeln wir später, und wir bestimmen p'' durch $|rap''| = 0$, wo p'' auf der geraden Linie (pp') . Da $|rap| < 0$ und $|rap'| < 0$, so ist die Reihenfolge der p

$$p p' p'' \quad \text{oder} \quad p' p p'',$$

p'' kann nicht zwischen p und p' liegen; denn eine lineare Funktion kann nicht zwischen zwei negativen Werten verschwinden.

Wir wollen nun nachweisen:

$$|rp''i| = 0.$$

Wir haben:

$$|rap''| = 0, \quad |rai| = 0.$$

Ich behaupte, die beiden linearen Gleichungen

$$|rat| = 0 \quad \text{und} \quad |rti| = 0,$$

wo

$$t = t(x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(n)})$$

irgend einen Punkt bedeutet, sind identisch. Sie mögen aufgelöst etwa lauten

$$L^{(1)}x^{(1)} + L^{(2)}x^{(2)} + \dots + L^{(n)}x^{(n)} + L^{(0)} = 0$$

und

$$\bar{L}^{(1)}x^{(1)} + \bar{L}^{(2)}x^{(2)} + \dots + \bar{L}^{(n)}x^{(n)} + \bar{L}^{(0)} = 0.$$

In keiner dieser Gleichungen sind alle Koeffizienten Null. Denn das würde bedeuten, daß alle n -reihigen Determinanten der Matrix ra bzw. ri verschwänden, was aber nicht der Fall ist, weil $|rap| < 0$ und $|rip| < 0$. Die Gleichungen haben $(n+1)$ Wurzeln gemein, nämlich die $(n-1)$ Punkte von r sowie a und i ;

$$(L^{(1)} - \bar{L}^{(1)})x^{(1)} + (L^{(2)} - \bar{L}^{(2)})x^{(2)} + \dots + (L^{(0)} - \bar{L}^{(0)})$$

verschwindet also an $n+1$ Stellen. Die Determinante dieses Systems von $n+1$ homogenen linearen Gleichungen mit $(n+1)$ Unbekannten $|rai|$ verschwindet zwar, es können aber nicht alle Unterdeterminanten n^{ten} Grades verschwinden, weil sonst nicht

$$|rap| < 0 \quad \text{sondern} \quad |rap| = 0$$

sein müßte.

Hieraus folgt, daß der Quotient zweier der Unbekannten nicht unendlich sein kann, und setze ich, was erlaubt ist, eine der Differenzen gleich 0, so verschwinden auch alle andern. Damit ist die Identität der Gleichungen

$$|rat| = 0 \quad \text{und} \quad |rti| = 0$$

nachgewiesen, und da $|rap''| = 0$, so folgt

$$|rp''i| = 0.$$

Wir werden von dem Schluß, daß aus

$$|rap''| = 0 \quad \text{und} \quad |rai| = 0$$

entweder $|rp''i| = 0$ oder das Verschwinden der n -reihigen Determinanten von ra folgt, noch öfters Gebrauch machen.

Da nun p'' nicht zwischen p und p' liegen kann und

$$|rpi| > 0,$$

so folgt

$$|rp'i| > 0.$$

Ist, was wir eben ausschlossen, $|rat|$ konstant, wenn sich t auf (pp') bewegt, so behaupte ich, auch $|rit|$ ist auf dieser Linie konstant. Ist dies nämlich nicht der Fall, so gibt es auf (pp') einen Punkt p'' , für den $|rip''| = 0$, und ich beweise analog wie oben, daß nun auch $|rap''| = 0$, was der Annahme, daß $|rat|$ auf (pp') konstant sei, widerspricht.

Ist

$$|wp'| < 0, \quad \text{während} \quad |wp| > 0,$$

sodaß sich $p \dots p'' \dots p'$ folgen, so ist zunächst $|rp'i| < 0$. Wir kehren aber für das Polyeder wp' das Zeichen von w und demnach auch von r um, sodaß der Satz bestehen bleibt.

Ein Punkt i , der innerhalb der Wandung w liegt, tut dies unabhängig davon, in welchem Elementarpolyeder w vorkommt.

Es stelle (ab) eine gerade Linie dar, und b liege im Innern eines konvexen Polyeders. Ich behaupte: Wenn ich mit einem variablen Punkte t auf der geraden Linie (ab) von a kommend über b hinaus fortschreite, so komme ich an einen Punkt c , der der Begrenzung des konvexen Polyeders angehört. Bilde ich nämlich die Determinanten $|wt|, |w't|, |w''t|, \dots$ und lasse t längs (ab) laufen, so können diese Determinanten, da ihre Summe konstant bleiben muß, nicht alle wachsen; falls sie nicht alle konstant bleiben — und daß dieses nicht der Fall sein kann, werden wir gleich nachweisen — muß mindestens eine von ihnen abnehmen. Da diese Determinante eine lineare Funktion von t ist, so muß sie, während ich mit t auf (ab) fortschreite, einmal 0 und sodann negativ werden; sie bleibt dann negativ, soweit ich auch über c hinaus fortschreite. Da dasselbe auch gilt, wenn ich von b nach a zu gehe, so erhalten wir sofort die Sätze:

1) *Eine gerade Linie kann nur innerhalb eines endlichen Stückes innerhalb eines konvexen Polyeders verlaufen.*

2) *Enthält eine gerade Linie einen Punkt, der dem Innern, aber nicht der Begrenzung eines konvexen Polyeders angehört, so hat sie mit der Begrenzung dieses Polyeders zwei und nur zwei Punkte gemein.*

3) *Eine Gerade, die mit dem Innern eines konvexen Polyeders zwei Punkte gemein hat, hat mit ihm alle Punkte gemein, die auf ihr zwischen diesen beiden liegen.*

Wir haben nun nachzuweisen, daß die Determinanten

$$|wt|, |w't|, |w''t|, \dots$$

nicht alle konstant bleiben können, wenn sich t auf einer geraden Linie bewegt. Wir weisen dies zunächst für ein Elementarpolyeder mit den

Eckpunkten $1, 2, 3, \dots, n, n+1$ nach. Was bedeutet es, wenn $|1, 2, \dots, nt|$ von t unabhängig ist, wenn t sich auf einer geraden Linie bewegt? Die Gerade sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= L_1^{(1)}t + L_0^{(1)}, \\ x^{(2)} &= L_1^{(2)}t + L_0^{(2)}, \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= L_1^{(n)}t + L_0^{(n)}. \end{aligned}$$

Es muß dann

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \\ L_1^{(1)}t + L_0^{(1)} & L_1^{(2)}t + L_0^{(2)} & \dots & L_1^{(n)}t + L_0^{(n)} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \\ L_1^{(1)} & L_1^{(2)} & \dots & L_1^{(n)} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine homogene lineare Gleichung der L_1 , und wir haben gemäß den $n+1$ Wandungen $n+1$ solcher Gleichungen für die n Größen L_1 . Nun ist in der hingeschriebenen Gleichung der Koeffizient von $L_1^{(1)}$ gleich der dem Element $x_{n+1}^{(1)}$ zugeordneten Unterdeterminante in $|1, 2, \dots, n+1|$, die wir mit $X_{n+1}^{(1)}$ bezeichnen wollen. Die Matrix der Gleichungen für die L_1 ist demnach

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \dots & X_1^{(n)}, \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & \dots & X_2^{(n)}, \\ & \vdots & & \vdots \\ X_{n+1}^{(1)} & X_{n+1}^{(2)} & \dots & X_{n+1}^{(n)}. \end{aligned}$$

Nun müssen entweder die L_1 oder alle n -reihigen Determinanten dieser Matrix verschwinden. Wäre letzteres der Fall, so müßte auch die aus den Unterdeterminanten von $|1, 2, 3, \dots, n, n+1|$ gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \dots & X_1^{(n)} & X_1^{(n+1)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & \dots & X_2^{(n)} & X_2^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_{n+1}^{(1)} & X_{n+1}^{(2)} & \dots & X_{n+1}^{(n)} & X_{n+1}^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

verschwinden; diese ist aber nach einem bekannten Determinantensatz gleich $(1, 2, 3, \dots, n, n+1)^n$, also sicher von 0 verschieden.

Es können also nicht alle Determinanten $|wt|$, $|w't|$, \dots auf der geraden Linie konstant bleiben; wegen der Bedingung (1) kann nicht eine allein variabel sein, es sind also mindestens zwei Determinanten variabel.

Wir wollen diesen für Elementarpolyeder geführten Beweis auf allgemeine Polyeder ausdehnen. Wir haben dabei nur nachzuweisen, daß nicht alle Wandungen der Elementarpolyeder, die variable Determinanten liefern, bei der Zusammensetzung weggefallen sein können. Es sei eine Linie gegeben, und wir nehmen eine Wandung, die eine auf ihr nicht konstante Determinante liefert. Da es, wie wir sahen, auf die Konstanten L_0 der Linie nicht ankommt, sondern nur auf die L_1 , so können wir uns die L_0 so bestimmt denken, daß die Linie die Wandung in ihrem Innern schneidet und demnach an der Schnittstelle in das Innere eines Elementarpolyeders tritt; wir gehen nun auf ihr stets in derselben Richtung weiter, sie muß an irgend einer Stelle aus dem Elementarpolyeder wieder austreten, sagen wir bei α_1 durch die Wandung w_1 ; wenn die Wandung w_1 wegfallen soll, so muß ein Elementarpolyeder mit der Wandung $-w_1$ existieren, und in dieses tritt, da α_1 auch im Innern von $-w_1$ liegt, die Linie nun ein; sie muß auch aus diesem wieder austreten, etwa bei α_2 durch w_2 ; dann muß auch wieder $-w_2$ existieren, u. s. w. Da wir auf der Linie stets in demselben Sinn fortschreiten, so kommen wir stets zu wirklich voneinander verschiedenen Elementarpolyedern, und wir sehen, daß es bei einer endlichen Anzahl von Elementarpolyedern keine gerade Linie geben kann, auf der die Determinanten aller Wandungen konstant sind.

§ 3.

Anordnung zu konvexen Polyedern.

Wir wollen zeigen, daß, wenn eine Anzahl Punkte gegeben ist, die mindestens eine nichtverschwindende $(n+1)$ reihige Determinante liefern, man stets ein konvexes Polyeder konstruieren kann, dessen Eckpunkte sämtlich zu diesen gegebenen Punkten gehören, und in dessen Innern alle gegebenen Punkte liegen.

Wir nehmen an, wir hätten ein konvexes Polyeder konstruiert, dessen Eckpunkte sämtlich zu den gegebenen Punkten gehören, und in dessen Innern sich möglicherweise noch gegebene Punkte befinden. Wir wollen zeigen, wie dies Polyeder zu erweitern ist, falls noch Punkte sich außerhalb befinden. Das Polyeder habe die Wandungen w, w_1, w_2, \dots , und p sei ein außerhalb befindlicher Punkt. Es können dann die Determinanten $|wp|, |w_1p|, |w_2p|, \dots$ weder alle positiv (einschließlich der Null), noch

alle negativ sein. Denn im ersten Fall läge der Punkt p innerhalb, im zweiten hätte das Polyeder einen negativen Inhalt (S. 519). Ich teile die Wandungen des Polyeders ein in

$$w_1', w_2', w_3', \dots \quad \text{und} \quad w_1'', w_2'', w_3'', \dots$$

sodaß

$$\begin{aligned} |w_1' p| &\geq 0, & |w_2' p| &\geq 0, & |w_3' p| &\geq 0, \dots \\ |w_1'' p| &< 0, & |w_2'' p| &< 0, & |w_3'' p| &< 0. \end{aligned}$$

Die Wandungen w' können in das neu zu bildende konvexe Polyeder mit herübergenommen werden, die Wandungen w'' nicht. Wir bilden demgemäß die Elementarpolyeder $-w''p$, und ich behaupte, daß das neue Polyeder allen Bedingungen genügt.

Wir teilen zum Beweise die in dem ursprünglichen Polyeder vorkommenden Ränder in drei Arten.

Die Ränder

$$r_1', r_2', r_3', \dots$$

sollen nur in den Wandungen

$$w_1', w_2', w_3', \dots$$

Die Ränder

$$r_1'', r_2'', r_3'', \dots$$

sollen nur in den Wandungen

$$w_1'', w_2'', w_3'', \dots$$

Die Ränder

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

sollen sowohl in den Wandungen w' als auch in w'' enthalten sein.

Hierbei haben wir der Kürze halber „Rand“ im absoluten Sinn, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen gebraucht. Wir denken uns nun alle Ränder, die im Polyeder vorkommen, hingeschrieben, und zwar jeden so oft als er vorkommt, unter Beachtung des ihm vorkommenden Zeichens. Teilen wir die Ränder in die drei Arten ein, so ist klar, daß auch innerhalb jeder dieser Arten jeder Rand gleich oft mit dem einen und dem entgegengesetzten Zeichen vorkommen muß (S. 519). Für die Richtigkeit unserer Schlußfolgerungen ist es dabei belanglos, ob von jeder Art Ränder existieren oder nicht.

Bilden wir nun sämtliche Elementarpolyeder

$$-w''p,$$

wobei ja $-|w''p| > 0$, so haben diese die Wandungen

$$-w'' \quad \text{und} \quad (\rho p),$$

wenn ρ irgend ein Rand von w'' ist. Die ρ zerfallen in r und r'' , und zwar sind in den ρ sämtliche r'' , nicht aber sämtliche r enthalten; denn die r kommen, sofern sie Ränder der w' sind, in den ρ nicht vor. Danach

heben sich wohl die Wandungen ($r''p$), nicht aber alle Wandungen (rp) gegeneinander auf. w'' hebt sich gegen $-w''$ und unser neues Polyeder hat nur Wandungen

$$w' \text{ und } (rp).$$

Es ist nun nur noch zu zeigen, daß die Wandungen (rp), mit jedem der Eckpunkte des alten Polyeders zusammengesetzt, eine positive Determinante ergeben. Zu diesem Zweck verbinde ich p mit irgend einem Punkte a , der auf dem Rande r liegt, d. h. $|w'a| = 0$ und $|w''a| = 0$ genügt und zu der Begrenzung des ursprünglichen Polyeders gehört, durch eine Gerade (pa). Schließen wir dabei den Grenzfall, daß in $|w'p| \geq 0$ das Gleichheitszeichen gelten soll, zunächst aus.

Es ist nun die Determinante $|w''t|$, wo t einen Punkt der Geraden (pa) bedeutet, für $t = a$ gleich Null, und für $t = p$ negativ; sie bleibt also negativ, soweit ich mich auch von a in der Richtung nach p oder über p hinaus entferne. Dagegen ist $|w't|$ für $t = p$ positiv, für $t = a$ Null, und demnach negativ für alle Punkte von (pa), die von p aus gesehen, jenseits a liegen. Demnach ist für alle Punkte der Geraden außer a eine der Determinanten des ursprünglichen Polyeders negativ; wir können also sagen, die Gerade (pa) hat mit dem ursprünglichen Polyeder keinen Punkt außer a gemeinsam. Ist a irgend eine gemeinsame Lösung von $|w't| = 0$ und $|w''t| = 0$, ohne zu der Begrenzung des ursprünglichen Polyeders zu gehören, so hat die Gerade (pa) mit dem Innern des Polyeders überhaupt keinen Punkt gemeinsam.

Ich behaupte nun, $|rpt|$ verschwindet für keinen Innenpunkt des Polyeders, abgesehen von den auf dem Rand r liegenden Punkten. Nehmen wir also an, es bestände die Gleichung $|rpi| = 0$, wo i einen Innenpunkt bedeutet. Wir legen eine Gerade durch die Punkte p und i durch $(n-1)$ lineare Gleichungen. Als eine dieser Gleichungen können wir $|rpt| = 0$ wählen, die übrigen Gleichungen seien

$$f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = 0, \quad \dots \quad f_{n-2}(t) = 0.$$

Wir schreiben diese Gleichungen zusammen mit $|w't| = 0$. Es sei $w' = (r1)$, so haben wir das System:

$$\begin{aligned} |r1t| &= 0, \\ |rpt| &= 0, \\ f_1(t) &= 0, \\ &\vdots \\ f_{n-2}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten stellt den Schnittpunkt der Geraden (pi) mit $|w't| = 0$ dar. Es sei nun D

die Determinante dieser Gleichungen; ist $D \neq 0$, so haben die Gleichungen eine Lösung, etwa a , und es ist

$$|rpa| = 0 \quad \text{und} \quad |r1a| = 0.$$

Nun folgt nach unserm Beweis S. 521 aus diesen Gleichungen, daß entweder $|rp1| = 0$ oder alle n -reihigen Determinanten von ra verschwinden. Da wir die erste Eventualität $|rp1| = |w'p| = 0$ ausgeschlossen haben, so folgt, das Verschwinden der n -reihigen Determinanten von ra , und hieraus folgt $|w''a| = 0$. D. h. der Punkt a genügt $|w'a| = 0$ und $|w''a| = 0$, er liegt auf dem Rande r .

(pi) ist dann eine gerade Linie, die von p zu einem Randpunkt a geht und einen Punkt i des Innern enthält, was wir aber als unmöglich nachgewiesen haben.

Wir haben $D \neq 0$ angenommen. Es sei jetzt $D = 0$. Wir beachten nun: Vom Punkt i war nur $|rpi| = 0$ vorausgesetzt. Wir ziehen nun von i eine Gerade zu einem beliebigen Punkte von r , etwa b , und es sei i' ein beliebiger Punkt der Geraden (ib) zwischen i und b ; i' liegt dann im Innern des Polyeders, und es ist auch $|rpi'| = 0$, weil beide Eigenschaften von den beiden Punkten i und b gelten. Wir können also in unserer Betrachtung i' statt i benutzen. Wir lassen jetzt i' auf der Geraden (ib) wandern, dadurch werden alle n Koordinaten von i' lineare Funktionen eines Parameters t . Es kann aber D nicht identisch in t verschwinden, weil D für $i' = b$ nicht verschwindet; denn die Gerade (pb) hat mit $|w't| = 0$ sicher einen und nur einen Punkt nämlich b gemeinsam; d. h. die Gleichungen (3) haben eine und nur eine Lösung, und dann kann ihre Determinante nicht verschwinden. Verschwindet aber D nicht identisch in t , so muß es auch außer $i' = b$ noch Punkte i' geben, für die $D \neq 0$.

Die Annahme $|rpi| = 0$ ist also unzulässig: $|rpt|$ kann für keinen Punkt, der im Innern des ursprünglichen Polyeders liegt, verschwinden. Wir haben aber noch die einschränkende Voraussetzung, daß in $|w'p| \geq 0$ nicht das Gleichheitszeichen gelte; nehmen wir also jetzt $|w'p| = 0$ an. $|r1p| = 0$. Dann verschwindet $|rpt|$ für dieselben Punkte, für die $|r1t|$ verschwindet, und umgekehrt. Denn nach S. 521 bedingt von den beiden Gleichungen

$$|r1t| = 0 \quad \text{und} \quad |rpt| = 0$$

wegen $|r1p| = 0$ die eine die andere. Die n -reihigen Determinanten von rp können nicht alle verschwinden, denn r kommt noch in einer Wandung w'' vor und es müßte $|w''p| = 0$, während $|w''p| < 0$; auch die Determinanten von $r1$ d. h. von w' können nicht verschwinden, wie sich aus der Betrachtung des Elementarpolyeders, in dem w' vorkommt — und in mindestens einem muß es vorkommen —, ergibt.

$|rpt|$ verschwindet also für keinen Punkt des Innern, wo die zur Begrenzung gehörenden Punkte, die $|w't| = 0$ genügen, eventuell auszuschießen sind. Hieraus folgt aber sofort, daß $|rpt|$ für alle Punkte im Innern dasselbe Vorzeichen haben muß. Wir wissen nun, daß das Vorzeichen für einen Punkt positiv ist, nämlich für den letzten Eckpunkt des Elementarpolyeders, dem die Wandung (rp) angehört.

Hiermit ist alles, was zu beweisen war, bewiesen; wir haben aus einem gegebenen konvexen Polyeder ein neues konstruiert, das einen Punkt p , der außerhalb des ursprünglichen lag, als Eckpunkt enthält und die Eckpunkte des früheren entweder auch als Eckpunkte, oder im Innern. *Damit ist der Eingangs dieses Paragraphen angekündigte Satz bewiesen.*

§ 4.

Trennung zweier konvexen Polyeder.

Es seien P und \bar{P} zwei konvexe Polyeder, die der Bedingung genügen, daß kein Punkt zugleich im Innern von P und im Innern von \bar{P} liegt. Ich behaupte dann:

Es gibt eine lineare Funktion

$$p^{(1)}x^{(1)} + p^{(2)}x^{(2)} + \dots + p^{(n)}x^{(n)} + p^{(n+1)},$$

die an allen im Innern von P liegenden Punkten positive, und an allen im Innern von \bar{P} liegenden Punkten negative Werte annimmt.

Es sei eine Funktion zweier Punkte

$$p = p(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$$

und

$$\bar{p} = \bar{p}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(n)})$$

definiert durch

$$f = +\sqrt{(x^{(1)} - \bar{x}^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \bar{x}^{(2)})^2 + \dots + (x^{(n)} - \bar{x}^{(n)})^2}.$$

Wir suchen das Minimum von f unter der Bedingung, daß p im Polyeder P und \bar{p} im Polyeder \bar{P} liege. Dieses Minimum muß existieren und von 0 verschieden sein, weil nicht alle Quadrate verschwinden können. Es werde etwa an den Punkten p^* und \bar{p}^* angenommen. Wir legen durch diese beiden Punkte eine gerade Linie, d. h. wir stellen $(n-1)$ Gleichungen auf, denen die Koordinaten von p^* und \bar{p}^* genügen. Diese Gleichungen seien die folgenden:

$$a_1^{(1)} x^{(1)} + a_1^{(2)} x^{(2)} + \dots + a_1^{(n)} x^{(n)} + a_1^{(n+1)} = 0,$$

$$a_2^{(1)} x^{(1)} + a_2^{(2)} x^{(2)} + \dots + a_2^{(n)} x^{(n)} + a_2^{(n+1)} = 0,$$

⋮

$$a_{n-1}^{(1)} x^{(1)} + a_{n-1}^{(2)} x^{(2)} + \dots + a_{n-1}^{(n)} x^{(n)} + a_{n-1}^{(n+1)} = 0,$$

Zu diesen Gleichungen nehmen wir noch eine, die für p^* und \bar{p}^* nicht erfüllt ist:

$$a_n^{(1)} x^{(1)} + a_n^{(2)} x^{(2)} + \dots + a_n^{(n)} x^{(n)} + a_n^{(n+1)} = 0,$$

und unterwerfen die Koeffizienten a den Bedingungen:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_{\mu}^{(\nu)})^2 = 1$$

für alle μ und

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_{\mu}^{(\nu)} a_{\mu'}^{(\nu)}) = 0$$

für $\mu \neq \mu'$.

Man überzeugt sich leicht, daß dies stets auf unendlich vielfache Weise möglich ist, und es ist bekannt, daß alsdann auch

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} (a_{\mu}^{(\nu)})^2 = 1$$

für alle ν und

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} (a_{\mu}^{(\nu)} a_{\mu'}^{(\nu)}) = 0$$

für $\nu \neq \nu'$.

Wir gehen jetzt zu folgendem Koordinatensystem über:

$$a_1^{(1)} x^{(1)} + a_1^{(2)} x^{(2)} + \dots + a_1^{(n)} x^{(n)} + a_1^{(n+1)} = \xi_1,$$

$$a_2^{(1)} x^{(1)} + a_2^{(2)} x^{(2)} + \dots + a_2^{(n)} x^{(n)} + a_2^{(n+1)} = \xi_2,$$

⋮

$$a_n^{(1)} x^{(1)} + a_n^{(2)} x^{(2)} + \dots + a_n^{(n)} x^{(n)} + a_n^{(n+1)} = \xi_n.$$

Man sieht sofort, daß bei dieser Transformation die Form der Funktion f erhalten bleibt, sodaß

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{(x^{(1)} - \bar{x}^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \bar{x}^{(2)})^2 + \dots + (x^{(n)} - \bar{x}^{(n)})^2} \\ &= \sqrt{(\xi^{(1)} - \bar{\xi}^{(1)})^2 + (\xi^{(2)} - \bar{\xi}^{(2)})^2 + \dots + (\xi^{(n)} - \bar{\xi}^{(n)})^2}. \end{aligned}$$

Es hat also auch

$$\sqrt{(\xi^{(1)} - \bar{\xi}^{(1)})^2 + (\xi^{(2)} - \bar{\xi}^{(2)})^2 + \dots + (\xi^{(n)} - \bar{\xi}^{(n)})^2},$$

wenn p in P und \bar{p} in \bar{P} liegen soll, bei $p = p^*$ und $\bar{p} = \bar{p}^*$ ein Minimum. Die neuen Koordinaten von p^* und \bar{p}^* sind alle gleich Null mit Ausnahme von $\xi^{(n)*}$ und $\bar{\xi}^{(n)*}$. Es sei etwa $\xi^{(n)*} > \bar{\xi}^{(n)*}$. Ich behaupte: Kein Punkt im Innern von P kann ein $\xi^{(n)}$ haben, das kleiner ist als $\xi^{(n)*}$. Nehmen wir an, dies sei bei einem Punkte p^{**} der Fall. Wir ziehen eine gerade

Linie von p^* nach p^{**} , und zwar denken wir uns die Koordinaten der Punkte dieser Linie dargestellt durch einen Parameter t , der zunimmt, wenn ich von p^* nach p^{**} gehe. Dann ist $\frac{d\xi^{(n)}}{dt}$ für $\xi^{(n)} = \xi^{(n)*}$ negativ. Ich bilde $\frac{df}{dt}$ bei festgehaltenem $\bar{p} = \bar{p}^*$ für $p = p^*$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\xi^{(n)*} - \bar{\xi}^{(n)*}}{\sqrt{(\xi^{(n)*} - \bar{\xi}^{(n)*})^2}} \cdot \frac{d\xi^{(n)}}{dt}.$$

Diese Größe ist negativ, wenn $\frac{d\xi^{(n)}}{dt} < 0$. Da nun jeder Punkt der Geraden von p^* nach p^{**} im Innern von P liegt, so widerspricht dies der Minimalbedingung der Punkte p^* und \bar{p}^* . Ebenso weisen wir nach, daß kein Punkt von \bar{P} ein größeres $\bar{\xi}^{(n)}$ haben kann als $\bar{\xi}^{(n)*}$. Nehmen wir daher eine Konstante c an, sodaß

$$\xi^{(n)*} > c > \bar{\xi}^{(n)*},$$

so haben wir die verlangte lineare Funktion, die für alle Punkte von P positive und für alle Punkte von \bar{P} negative Werte annimmt, dargestellt in:

$$\xi^{(n)} - c = a_n^{(1)} x^{(1)} + a_n^{(2)} x^{(2)} + \dots + a_n^{(n)} x^{(n)} + a_n^{(n+1)} - c.$$

§ 5.

Zerlegung in Elementarpolyeder.

Wir wollen den Satz beweisen: Wenn ein Punkt i in einem konvexen Polgeder \mathfrak{P} liegt, so kann man stets ein Elementarpolyeder P , dessen Eckpunkte zu den Eckpunkten von \mathfrak{P} gehören, angeben, in dem i liegt.

Der Satz gelte bei niedriger dimensionalen Räumen für bewiesen. Für $n = 1$ ist er trivial, da in diesem Fall jedes konvexe Polyeder ein Elementarpolyeder ist.

Von einem Eckpunkt a von \mathfrak{P} ziehe ich eine gerade Linie nach i , die bei α aus dem Innern von \mathfrak{P} austreten möge. Wenn ich ein Elementarpolyeder angeben kann, das a und α als Innenpunkte (wobei a speziell Eckpunkt sein möge) und nur Eckpunkte von \mathfrak{P} als Eckpunkte enthält, so ist der Satz bewiesen.

Der Punkt α muß mindestens einer Determinantengleichung $|w't| = 0$ genügen. Wir nehmen eine lineare Transformation vor, die die Koordinaten $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$ in $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$ überführt, und zwar sei

$$|w't| = \pm \xi^{(n)}.$$

Die Substitutionsdeterminante sei positiv; es bleiben dann alle Eigenschaften der Polyeder, da sich alle Determinanten nur mit der Substitutionsdeterminante multiplizieren, in dem neuen Raum erhalten.

Es können außer w' noch andere Wandungen von \mathfrak{B} Determinantengleichungen liefern, die mit $\xi^{(n)} = 0$ identisch sind. Es seien dies

$$w', w_1', w_2', \dots,$$

sodaß in allen Eckpunkten dieser Wandungen die $\xi^{(n)}$ -Koordinate verschwindet.

Dagegen sollen

$$w'', w_1'', w_2'', \dots,$$

hiervon verschiedene Determinantengleichungen liefern, sodaß keine dieser Wandungen nur Eckpunkte mit verschwindender $\xi^{(n)}$ -Koordinate enthält.

Es sei das Vorzeichen von $|w't| = \pm \xi^{(n)}$ so bestimmt, daß ein Eckpunkt von \mathfrak{B} , etwa b ein negatives $\xi^{(n)}$ habe. Da \mathfrak{B} konvex, muß $|w'b| \geq 0$ d. h. wenn etwa $w' = (1, 2, \dots, n)$

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \dots & \xi_1^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \dots & \xi_2^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \xi_n^{(2)} & \dots & \xi_n^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \xi_b^{(1)} & \xi_b^{(2)} & \dots & \xi_b^{(n-1)} & \xi_b^{(n)} & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Vertauschen wir die letzten Spalten und berücksichtigen, daß $\xi_b^{(n)} < 0$, so folgt

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \dots & \xi_1^{(n-1)} & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \dots & \xi_2^{(n-1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \xi_n^{(2)} & \dots & \xi_n^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Das Gleichheitszeichen kann nicht gelten, weil sonst w' mit jedem Punkt eine verschwindende Determinante liefern müßte. Lassen wir die $\xi^{(n)}$ -Koordinate weg, was wir durch \bar{w}, \bar{r}, \dots statt w, r, \dots ausdrücken wollen, so kann in dem $(n-1)$ -dimensionalen Raum \bar{w}' als Elementarpolyeder betrachtet werden. Dasselbe gilt von $\bar{w}_1', \bar{w}_2', \dots$, da ja alle mit b positive Determinanten liefern müssen. Ebenso sehen wir, daß jeder Punkt von \mathfrak{B} ein negatives oder verschwindendes $\xi^{(n)}$ haben muß; denn ein Punkt mit positivem $\xi^{(n)}$ würde mit w' eine negative Determinante liefern.

Wir teilen die Ränder der Wandungen w', w_1', w_2', \dots in zwei Teile:

$$r, r_1, r_2, \dots \text{ mögen außer in } w', w_1', w_2', \dots$$

noch in Wandungen w'' vorkommen,

$$r', r_1', r_2', \dots \text{ mögen nur in } w', w_1', w_2', \dots$$

vorkommen. (Vergl. S. 525.)

Die Ränder

$$r, r_1, r_2, \dots \text{ können in den Wandungen } w', w_1', w_2', \dots$$

nicht mit demselben Vorzeichen vorkommen, wie in w'', w_1'', \dots . Denn wäre etwa

$$(rb) = w'', \quad (rc) = w',$$

so müßte

$$\begin{aligned} |w'b| &\geq 0, & |w''c| &\geq 0, \\ |rcb| &\geq 0, & |rcb| &\geq 0, \end{aligned}$$

woraus $|rcb| = 0$ folgen würde, was aber nicht möglich ist, weil sonst die Gleichungen

$$|rbt| = 0 \quad \text{und} \quad |rct| = 0$$

nach S. 521 identisch wären. Denn alle n -reihigen Determinanten von rb oder rc d. h. von w'' und w' können nicht verschwinden. Die Ränder r, r_1, r_2, \dots mögen als r, r_1, r_2, \dots in w', w_1', w_2', \dots und als $-r, -r_1, -r_2, \dots$ in w'', w_1'', w_2'', \dots enthalten sein.

Fassen wir $\bar{w}, \bar{w}_1', \bar{w}_2', \dots$ als Elementarpolyeder, die

$$\bar{r}, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}', \bar{r}_1', \bar{r}_2', \dots$$

als ihre Wandungen auf, so heben sich die $\bar{r}', \bar{r}_1', \bar{r}_2', \dots$ gegenseitig heraus. (Vergl. S. 526.) Ich behaupte, die Wandungen $\bar{r}, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots$ bilden ein konvexes Polyeder. Sei c ein nicht in \bar{r} vorkommender Eckpunkt, so ist $|\bar{r}c| \geq 0$ nachzuweisen. Es sei etwa $\bar{r} = (1, 2, \dots, n-1)$, so soll

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \dots & \xi_1^{(n-1)} & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \dots & \xi_2^{(n-1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_{n-1}^{(1)} & \xi_{n-1}^{(2)} & \dots & \xi_{n-1}^{(n-1)} & 1 \\ \xi_c^{(1)} & \xi_c^{(2)} & \dots & \xi_c^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

$-r$ kommt in einer Wandung w'', w_1'', \dots vor, und zwar etwa als $-(rb)$; b muß dann ein negatives $\xi^{(n)}$ haben. Da \mathfrak{P} konvex ist, muß $-|rbc| \geq 0$; d. h. es muß

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \dots & \xi_1^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \dots & \xi_2^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_b^{(1)} & \xi_b^{(2)} & \dots & \xi_b^{(n-1)} & \xi_b^{(n)} & 1 \\ \xi_c^{(1)} & \xi_c^{(2)} & \dots & \xi_c^{(n-1)} & 0 & 1 \end{vmatrix} \leq 0.$$

woraus nach Vertauschung der letzten Zeilen und Spalten unter Beachtung von $\xi_b^{(n)} < 0$ die obige Ungleichung folgt. Die \bar{r} bilden also ein konvexes Polyeder.

Der Punkt α muß innerhalb dieses konvexen Polyeders liegen. Gäbe es nämlich eine Wandung \bar{r} , für die $|\bar{r}\alpha| < 0$, so ist analog wie oben zu

sehen, daß im n -dimensionalen Raum diejenige Wandung w'' , die $-r$ enthält, auch $|w''\alpha| < 0$ liefern müßte, d. h. es läge α nicht in \mathfrak{P} .

In dem $(n-1)$ -dimensionalen Polyeder $\bar{r}, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots$ gibt es nach Voraussetzung ein Elementarpolyeder, in dessen Innern α liegt. Sind $\bar{r}, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{n-1}$ seine Wandungen, so liegt, wie nunmehr leicht zu sehen, α auch innerhalb des n -dimensionalen Elementarpolyeders mit den Wandungen

$$-(ra), -(r_1a), \dots -(r_{n-1}a),$$

die $(n+1)^{\text{te}}$ Wandung wird von den n Eckpunkten von r, r_1, \dots, r_{n-1} gebildet. Sie liefert, da alle $\xi^{(n)} = 0$ für α eine verschwindende Determinante.

Damit ist der angekündigte Satz bewiesen. Sind nun \mathfrak{P} und $\bar{\mathfrak{P}}$ zwei konvexe Polyeder, und tritt der Fall des vorigen Paragraphen, daß es keinen gemeinsamen Innenpunkt geben möge, nicht ein, so können wir zwei Elementarpolyeder P und \bar{P} , wo P nur Eckpunkte von \mathfrak{P} , \bar{P} nur Eckpunkte von $\bar{\mathfrak{P}}$ enthält, in solcher Weise angeben, daß auch P und \bar{P} einen gemeinsamen Innenpunkt haben.

§ 6.

Auswahl der $(n+2)$ Punkte bei Unmöglichkeit der Trennung.

Unter einem Begrenzungselement eines konvexen Polyeders verstehen wir die Gesamtheit der Punkte p , bei denen von den Bedingungen $|wp| \geq 0$, $|w'p| \geq 0$, $|w''p| \geq 0, \dots$ eine bestimmte Anzahl Male das Gleichheitszeichen gilt. Ist das gegebene konvexe Polyeder ein Elementarpolyeder, so unterscheiden wir nach dieser Anzahl die Ordnung des Begrenzungselementes. Es mögen die Punkte

$$1, 2, 3, \dots, n+1$$

ein Elementarpolyeder bilden. Es sei dann das Begrenzungselement

$$(1, 2, \dots, \nu)$$

die Gesamtheit der Punkte, bei denen diejenigen Determinanten verschwinden, in denen die Punkte $1, 2, \dots, \nu$ alle vorkommen. Dies sind, da wir unter den $n+1-\nu$ nicht in $(1, 2, \dots, \nu)$ enthaltenen Punkten jeden zur Bildung einer Determinante weglassen können, $n+1-\nu$ Gleichungen. Ist μ die Ordnung eines Begrenzungselementes und ν die Anzahl seiner Eckpunkte, so gilt

$$\mu = n+1-\nu.$$

Verbinden wir zwei in einem Begrenzungselement liegende Punkte durch eine Gerade, so ist klar, daß für dieses Begrenzungselement dieselben Sätze gelten, die wir S. 522 für das ganze Polyeder ableiteten. Lassen wir den Punkt \hat{t} auf dieser Geraden wandern, so muß nach einem endlichen

Stück eine der noch positiven Determinanten des Elementarpolyeders verschwinden. Jede dieser Determinanten enthält die übrigen $n + 1 - \nu$ Punkte und $\nu - 1$ aus der Zahl der $1, 2, \dots, \nu$. Möge etwa die den Punkt ν nicht enthaltende verschwinden, so heißt dies, wir gelangen in das Begrenzungselement $(\mu + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung $(1, 2, 3, \dots, \nu - 1)$. Wir können daher sagen: ein Begrenzungselement μ^{ter} Ordnung wird von lauter Begrenzungselementen $(\mu + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung begrenzt.

Wir beweisen nun den Satz: Eine lineare Funktion

$$p^{(1)}x^{(1)} + p^{(2)}x^{(2)} + \dots + p^{(n)}x^{(n)} + p^{(n+1)},$$

die an den Eckpunkten $1, 2, \dots, \nu$ positiv ist, ist dies auch überall im Innern des Begrenzungselementes. Wir betrachten zunächst die Begrenzungselemente mit zwei Eckpunkten

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (\nu - 1, \nu).$$

Eine lineare Funktion, die bei 1 und 2 positiv ist, kann im Innern von $(1, 2)$ weder negativ noch 0 sein, weil lineare Funktionen kein Minimum haben. Wir gehen nun zu den Begrenzungselementen der nächst niedrigeren Ordnung d. h. zu

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), \dots, (\nu - 2, \nu - 1, \nu).$$

Es liege p im Innern von $(1, 2, 3)$. Ich ziehe von 1 eine Linie nach p . Diese muß nach dem, was wir eben sahen, ein Begrenzungselement höherer Ordnung schneiden, und daher sowohl an dem Schnittpunkt als auch bei 1 positiv sein, sie kann demnach bei p , das zwischen 1 und dem Schnittpunkt liegt, nicht anders als gleichfalls positiv sein. Und in dieser Weise fahren wir fort.

Es seien nun P und \bar{P} zwei Elementarpolyeder, und wir wollen annehmen, es gäbe einen Punkt i , der sowohl im Innern von P als auch im Innern von \bar{P} liege. Ich behaupte, es lassen sich von den Eckpunkten von P und \bar{P} $(n + 2)$ von der Art auslesen, daß es unmöglich ist, eine lineare Funktion

$$p^{(1)}x^{(1)} + p^{(2)}x^{(2)} + \dots + p^{(n)}x^{(n)} + p^{(n+1)}$$

anzugeben, die bei denjenigen der ausgewählten Punkte, die Eckpunkte von P sind, positiv, und bei denjenigen, die Eckpunkte von \bar{P} sind, negativ ist.

Wir ziehen durch i irgend eine Gerade und verfolgen sie von i aus in einer beliebigen Richtung. Die Gerade kann nicht immer im Innern der beiden Polyeder verlaufen. Sie möge etwa aus P zuerst austreten und zwar bei dem Punkte i' ; i' liegt dann auf einem Begrenzungselement erster Ordnung. Zu der Gleichung dieses Begrenzungselementes nehmen wir noch $n - 2$ beliebige Gleichungen, die durch i' befriedigt werden, hinzu und erhalten hierdurch eine Gerade. Verfolgen wir wieder diese

von i' an, so sei i'' der erste Punkt, bei dem sie aus einem der Polyeder austritt. i'' kann entweder auf einem Begrenzungselement zweiter Ordnung von P oder auf einem Begrenzungselement erster Ordnung von \bar{P} liegen. Jedenfalls genügt i'' zwei Gleichungen, zu denen wir nur noch $(n-3)$ hinzunehmen, um so wieder eine Gerade zu bilden und zu einem Punkt i''' zu gelangen. Das Weitergehen auf einer Geraden ist erst dann unmöglich, wenn der Punkt n Gleichungen genügt.

Wir können also einen Punkt i^* bestimmen, der auf zwei Begrenzungselementen der Ordnung μ und $\bar{\mu}$ liegt, wo

$$\mu + \bar{\mu} = n$$

und da

$$\mu = n + 1 - \nu, \quad \bar{\mu} = n + 1 - \bar{\nu},$$

so ist

$$n + 1 - \nu + n + 1 - \bar{\nu} = n,$$

$$\nu + \bar{\nu} = n + 2.$$

Eine lineare Funktion, die an diesen ν Punkten positiv und an diesen $\bar{\nu}$ negativ wäre, müßte bei i^ zugleich positiv und negativ sein, sie kann also nicht existieren.*

Wir haben bisher stets vorausgesetzt, daß sich sowohl unter den gegebenen Punkten p_1, p_2, p_3, \dots als auch unter $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \dots$ ($n+1$) finden mögen, die eine nichtverschwindende $(n+1)$ -reihige Determinante liefern. Dies braucht aber nicht immer der Fall zu sein. Es können etwa alle $(\nu+1)$ -reihigen und höheren Determinanten der p verschwinden. Wir nehmen dann eine Koordinaten-Transformation vor und ordnen die Punkte p in dem ν -dimensionalen Raum zu einem konvexen Polyeder. *Dieses ergänzen wir nach der Methode des § 5 durch successive Hinzunahme von Punkten aus den übrigen Dimensionen zu einem n -dimensionalen konvexen Polyeder.* In diesem gibt es dann Begrenzungselemente, deren Eckpunkte nur aus gegebenen Punkten bestehen, und in deren Innern alle gegebenen Punkte liegen. Mit den Punkten \bar{p} verfahren wir ebenso. Nun stellen wir die Alternative der Existenz oder Nichtexistenz eines gemeinsamen Innenpunktes nicht bezüglich der ganzen Polyeder, sondern bezüglich der ausgezeichneten Begrenzungselemente. Man sieht sofort, daß man auch auf diese die Methoden von § 4 und § 6 anwenden kann.

IV. Aufstellung der Annäherungsfunktion.

Es seien nun, wenn wir uns der Einfachheit halber auf $n = 2$ beschränken wollen, eine Anzahl Punkte

$$p_1 = (x_1, y_1, z_1), p_2 = (x_2, y_2, z_2), \dots, p_\nu = (x_\nu, y_\nu, z_\nu), \dots$$

gegeben und

$$z = a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x + a_5 y + a_6$$

so bestimmt, daß die größte der Größen

$$|z - z_\mu|, \quad L,$$

möglichst klein sei. Wenn L bei $x_1 y_1 \cdots x_\nu y_\nu$ angenommen wird, so ist etwa

$$(1) \quad \begin{aligned} a_1 x_1^2 + a_2 x_1 y_1 + a_3 y_1^2 + a_4 x_1 + a_5 y_1 + a_6 - z_1 &= L, \\ a_1 x_2^2 + a_2 x_2 y_2 + a_3 y_2^2 + a_4 x_2 + a_5 y_2 + a_6 - z_2 &= \varepsilon_2 L, \\ &\vdots \\ a_1 x_\nu^2 + a_2 x_\nu y_\nu + a_3 y_\nu^2 + a_4 x_\nu + a_5 y_\nu + a_6 - z_\nu &= \varepsilon_\nu L, \end{aligned}$$

wo die $\varepsilon = \pm 1$.

Es habe nun

$$\begin{aligned} s_1 &\text{ das Vorzeichen von } L \text{ und sei } \neq 0, \\ s_2 & \text{ " " " } \varepsilon_2 L \text{ " " } \neq 0, \\ &\vdots \\ s_\nu & \text{ " " " } \varepsilon_\nu L \text{ " " } \neq 0. \end{aligned}$$

Im übrigen seien diese Größen s unbestimmt. Aus Erwägungen, die denen unserer Einleitung analog sind, folgt dann sofort:

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß es keine Funktion kleinerer Abweichung gibt als $f(x, y)$, ist die Unauflösbarkeit der Gleichungen

$$(2) \quad \begin{aligned} b_1 x_1^2 + b_2 x_1 y_1 + b_3 y_1^2 + b_4 x_1 + b_5 y_1 + b_6 &= s_1, \\ b_1 x_2^2 + b_2 x_2 y_2 + b_3 y_2^2 + b_4 x_2 + b_5 y_2 + b_6 &= s_2, \\ &\vdots \\ b_1 x_\nu^2 + b_2 x_\nu y_\nu + b_3 y_\nu^2 + b_4 x_\nu + b_5 y_\nu + b_6 &= s_\nu, \end{aligned}$$

für jedes mögliche Wertsystem s .

Die Zahl der Unbekannten ist 6, die Zahl der Gleichungen ν , im allgemeinen Fall können die Gleichungen nur dann unauflösbar sein, wenn $\nu > 6$. Für $\nu = 7$ ist die Bedingung der Unauflösbarkeit

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 & s_1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_7^2 & x_7 y_7 & y_7^2 & x_7 & y_7 & 1 & s_7 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entwickeln wir nach den Elementen der letzten Spalte, so haben wir, abgekürzt geschrieben:

$$D = s_1 \cdot (2, 3, \dots, 7), -s_2 \cdot (1, 3, \dots, 7) + \dots + s_7 (1, 2, \dots, 6).$$

Da die s bis auf das Vorzeichen vollkommen willkürlich sind, die Determinante aber für alle mit der Vorzeichenbedingung verträglichen s von 0 verschieden sein soll, so sieht man leicht die Bedingung: Die Größen

$$\begin{aligned} & s_1 \cdot (2, 3, \dots 7), \\ & -s_2 \cdot (1, 3, \dots 7), \\ & \vdots \\ & s_7 \cdot (1, 2, \dots 6) \end{aligned}$$

müssen gleiches Vorzeichen haben. Hieraus bestimmt sich das Vorzeichen der s bis auf diesen allen gemeinsamen Faktor ± 1 . Demnach sind auch die ε bis auf einen Faktor bestimmt; wir haben jetzt nur noch das Gleichungssystem zu lösen, wodurch auch dieser Faktor mitbestimmt wird.

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + a_2 x_1 y_1 + a_3 y_1^2 + a_4 x_1 + a_5 y_1 + a_6 - \varepsilon_1 L &= z_1, \\ a_1 x_2^2 + a_2 x_2 y_2 + a_3 y_2^2 + a_4 x_2 + a_5 y_2 + a_6 - \varepsilon_2 L &= z_2, \\ &\vdots \\ a_1 x_7^2 + a_2 x_7 y_7 + a_3 y_7^2 + a_4 x_7 + a_5 y_7 + a_6 - \varepsilon_7 L &= z_7. \end{aligned}$$

Das System dieser sieben Gleichungen mit den sieben Unbekannten $a_1 \dots a_6$ und L ist sicher eindeutig lösbar. Denn die Determinante des Systems unterscheidet sich von D nur dadurch, daß statt der s hier die ε auftreten; sie ist also sicher von 0 verschieden.

Wir haben nachgewiesen, daß es eine Funktion kleinerer Abweichung als die so konstruierte Funktion $f(x, y)$ nicht geben kann. Es fragt sich, ob und wann es eine von $f(x, y)$ verschiedene Funktion von ebensogroßer Abweichung geben kann. Nehmen wir an, $g(x, y)$ sei eine solche Funktion, so muß, gleichviel an welchen Punkten $g(x, y)$ seinerseits die Abweichung annimmt, an den sieben Punkten, an denen $f(x, y)$ seine Abweichung annimmt,

$$|f(x_\mu y_\mu) - z_\mu| \geq |g(x_\mu y_\mu) - z_\mu|,$$

d. h. es darf $f(x, y) - g(x, y)$ an den Punkten $x_\mu y_\mu$ nicht entgegengesetztes Vorzeichen haben wie s_μ , sondern es muß entweder gleiches Vorzeichen haben oder verschwinden, was wir durch s'_μ andeuten wollen. Dies ergibt für die Koeffizienten der Differenz $f(x, y) - g(x, y)$ die Bedingungen:

$$\begin{aligned} b_1 x_1^2 + b_2 x_1 y_1 + b_3 y_1^2 + b_4 x_1 + b_5 y_1 + b_6 &= s'_1, \\ b_1 x_2^2 + b_2 x_2 y_2 + b_3 y_2^2 + b_4 x_2 + b_5 y_2 + b_6 &= s'_2, \\ &\vdots \\ b_1 x_7^2 + b_2 x_7 y_7 + b_3 y_7^2 + b_4 x_7 + b_5 y_7 + b_6 &= s'_7. \end{aligned}$$

Die Bedingung für die Auflösbarkeit ist das Verschwinden der Determinante. Ist keine der Unterdeterminanten gleich Null, so kann dies nur

eintreten, wenn $s_1' = s_2' = \dots = s_7' = 0$, und alsdann müssen in den übrig bleibenden homogenen Gleichungen alle b verschwinden, d. h. $f(x, y)$ ist eindeutig bestimmt.

Von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, ist die Annäherungsfunktion durch die gegebenen Punkte eindeutig bestimmt.

Es sei jetzt $\nu > 7$. Es sei xy die Projektion eines Punktes, an dem die Abweichung angenommen wird, und zwar wollen wir xy mit p bezeichnen, wenn $s > 0$ und mit \bar{p} wenn $s < 0$. Unsere Bedingung (2) können wir dann auch so fassen: Es soll unmöglich sein, eine Funktion

$$b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6$$

anzugeben, die an allen Punkten p positive und an allen Punkten \bar{p} negative Werte annimmt.

Es folgt nun aus dem Hilfssatze: Wenn die Punkte p und \bar{p} so gelegen sind, daß sie die Existenz einer derartigen Funktion

$$b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6$$

ausschließen, so kann man aus ihnen sieben derartige Punkte auswählen, daß schon sie eine Funktion der verlangten Form und Eigenschaft unmöglich machen.

Setzen wir

$$x^2 = \xi^{(1)}, \quad xy = \xi^{(2)}, \quad y^2 = \xi^{(3)}, \quad x = \xi^{(4)}, \quad y = \xi^{(5)}.$$

Bezeichne p einen Punkt $x_1 y_1$, so bezeichne π den entsprechenden Punkt des fünfdimensionalen Raumes

$$\pi_1 = \pi(\xi_1^{(1)} \xi_1^{(2)} \xi_1^{(3)} \xi_1^{(4)} \xi_1^{(5)})$$

und wir unterscheiden Punkte π und $\bar{\pi}$. Es kann nun keine Funktion

$$\beta_1 \xi^{(1)} + \beta_2 \xi^{(2)} + \beta_3 \xi^{(3)} + \beta_4 \xi^{(4)} + \beta_5 \xi^{(5)} + \beta_6$$

geben, die an allen Punkten π positive und an allen Punkten $\bar{\pi}$ negative Werte annähme; denn es würde alsdann die Funktion

$$\beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \beta_4 x + \beta_5 y + \beta_6$$

auch an allen Punkten p positive und an allen Punkten \bar{p} negative Werte annehmen. Ich wähle unter den Punkten π und $\bar{\pi}$ nach § 6 des vorigen Abschnittes sieben aus und nehme dann die diesen sieben Punkten entsprechenden Punkte p und \bar{p} und behaupte: Es kann keine Funktion

$$b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6$$

geben, die an den ausgewählten Punkten p positive und an den ausgewählten Punkten \bar{p} negative Werte annimmt, denn sonst würde sich

$$b_1 \xi^{(1)} + b_2 \xi^{(2)} + b_3 \xi^{(3)} + b_4 \xi^{(4)} + b_5 \xi^{(5)} + b_6$$

bei den entsprechenden Punkten π und $\bar{\pi}$ ebenso verhalten.

Daraus folgt: Nimmt die Annäherungsfunktion die Abweichung mehr als sieben Mal an, so lassen sich aus der Zahl der Annahmestellen sieben

so auswählen, daß die Annäherungsfunktion auch Annäherungsfunktion dieser sieben Punkte allein ist.

Hieraus ergibt sich die Lösung des Problems: Man greift aus der Zahl der gegebenen Punkte sieben heraus und bestimmt ihre Annäherungsfunktion. Man untersucht sodann, ob die so gefundene Funktion die Annäherungsfunktion für die Gesamtheit der gegebenen Punkte ist, indem man untersucht, ob $|f(x_\mu, y_\mu) - z_\mu| \leq L$ für alle gegebenen Punkte erfüllt ist. Dies ist, wenn man auf alle möglichen Arten sieben Punkte herausgreift, einmal und im wesentlichen auch nur einmal der Fall (im wesentlichen, d. h. die Ausnahmefälle bestimmter Determinantengleichungen ausgeschlossen). Wir haben bisher angenommen, daß der Grad der Annäherungsfunktion gleich zwei sei; man sieht aber, daß unsere Methoden nicht auf diesen Fall beschränkt sind. Vielmehr gilt allgemein:

1) Die Abweichung wird im allgemeinen Fall mindestens einmal öfter angenommen, als die Zahl der Parameter der Annäherungsfunktion beträgt.

2) Der Sinn, in dem die Abweichung angenommen wird, wird durch eine Determinantengleichung geliefert.

3) Die Koeffizienten der gesuchten Annäherungsfunktion werden durch Auflösung eines Systems linearer Gleichungen gefunden. Dieses System wird aus einer endlichen Anzahl von Systemen durch Versuche bestimmt.

Der zweite dieser Sätze wird besonders anschaulich, wenn die Anzahl der unabhängigen Variablen nicht, wie wir bisher der Allgemeinheit halber annahmen, gleich zwei, sondern gleich eins ist, d. h. Punkte der Ebene durch eine Kurve angenähert werden sollen. Unsere Ungleichung lautet dann:

$$D = \begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & 1 & s_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & 1 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_{n+2}^n & x_{n+2}^{n-1} & \dots & 1 & s_{n+2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nehmen wir $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ an, und entwickeln nach der letzten Spalte

$$D = s_1 \cdot (2, 3, \dots, n+2) - s_2 \cdot (1, 3, \dots, n+2) + \dots$$

so haben die Symbole $(2, 3, \dots, n+2)$, $(1, 3, \dots, n+2)$, \dots alle gleiches Vorzeichen. Denn sie sind gleich dem Differenzenprodukt, und offenbar ist das Vorzeichen verschiedener Differenzenprodukte, wenn in allen jedes Element kleiner ist, als das folgende, dasselbe. Hieraus folgt, daß die s abwechselndes Vorzeichen haben müssen, der Sinn, in dem die Abweichung angenommen wird, muß also abwechseln.

Wir haben uns auf das Interpolationsproblem beschränkt, weil dieses geeignet ist, eine Art Gerippe auch für die Behandlung des allgemeineren

Problems abzugeben, in dem die Annäherung einer überall in einem endlichen Intervall definierten Funktion durch ein Polynom verlangt wird. Verfolgen wir, was durch diese Änderung des Problems an unserm bisherigen Gedankengang geändert wird. Die Abweichung wird nicht mehr in einer endlichen Anzahl diskreter Punkte angenommen zu werden brauchen, sondern wir werden „Abweichungskurven“ haben, und zwar zwei verschiedene, nach dem Sinn, in dem die Abweichung angenommen wird. Wir projizieren diese Kurven wieder auf die Ebene der unabhängigen Variablen. Bei k unabhängigen Veränderlichen bilden die Projektionen $(k-1)$ -dimensionale Gebilde. Alle früheren Erwägungen bleiben bestehen, und es handelt sich vor allem um die Möglichkeit, auch den Satz des vorigen Abschnittes zu übertragen. Dieser Satz würde lauten:

Sind in einem n -dimensionalen Raum zwei endlich begrenzte Flächenstücke gegeben, so lassen sie sich entweder durch eine Ebene trennen, oder es existieren auf ihnen $n+2$ Punkte, so daß schon diese die Trennung unmöglich machen, wenn die auf einem Flächenstück liegenden Punkte von denen des andern getrennt werden sollen. Diese Flächenstücke wären zu „konvexen Körpern“ zu ergänzen, und diese Körper könnten als konvexe Polyeder mit unendlich vielen Eckpunkten angesehen werden. Das Ergänzen der Flächenstücke zu konvexen Körpern kann etwa so gedacht werden, daß als Innenpunkt des neuen Körpers jeder Punkt genommen werden soll, der auf einer geradlinigen Strecke liegt, deren Endpunkte entweder Punkte des gegebenen Flächenstücks oder schon auf diese Weise erhaltene Innenpunkte sind. Es wäre nun zu zeigen, daß zwei, aus zwei beliebigen Flächenstücken auf diese Weise erhaltene „konvexe Körper“ sich durch eine Ebene trennen lassen, falls kein Innenpunkt des einen ein Innenpunkt des andern ist, und ferner, daß sich für jeden Innenpunkt eines konvexen Polyeders ein Elementarpolyeder (im früheren Sinn) angeben läßt, in dessen Innern der betreffende Punkt liegt, und dessen Eckpunkte sämtlich Punkte des erzeugenden Flächenstücks sind.

Es ist zu vermuten, daß alle diese Sätze richtig sind. Dann aber läßt sich unser ganzer für das Interpolationsproblem durchgeführter Gedankengang auf den Fall einer überall definierten Funktion übertragen, und wir haben allgemein den Satz:

Ist m die Anzahl der verfügbaren Parameter der Annäherungsfunktion, so existieren $m+1$ Punkte der gegebenen angenähert darzustellenden Funktion von der Art, daß die Annäherungsfunktion dieser $m+1$ Punkte allein zugleich die Annäherungsfunktion der gegebenen Funktion ist.

Für den einfachsten Fall einer unabhängigen Variablen, für den sich, wie wir sahen, eine Abwechslung des Sinnes der Abweichung ergibt, ist dieser Satz in meiner Dissertation ausführlich nachgewiesen.