J. für Reine und Angewandte Mathematik, 84 (1878), 70-79

Sur la formule d'interpolation de *Lagrange*.

(Extrait d'une lettre de M. *Ch. Hermite* à M. *Borchardt*.)

Je me suis proposé de trouver un polynôme entier $F(x)$ de degré $n-1$, satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\begin{array}{llll} F(a)=f(a), & F'(a)=f'(a), & \dots & F^{\alpha-1}(a)=f^{\alpha-1}(a), \\ F(b)=f(b), & F'(b)=f'(b), & \dots & F^{\beta-1}(b)=f^{\beta-1}(b), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(l)=f(l), & F'(l)=f'(l), & \dots & F^{\lambda-1}(l)=f^{\lambda-1}(l) \end{array}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée. En supposant:

$$\alpha+\beta+\cdots+\lambda = n$$

la question comme on voit est déterminée, et conduira à une généralisation de la formule de *Lagrange* sur laquelle je présenterai quelques remarques. Elle se résout d'abord facilement comme il suit. Je considère une aire S, comprenant d'une part $a, b, \dots l$, et de l'autre la quantité x; je suppose qu'à son intérieur la fonction $f(x)$ soit uniforme et n'ait aucun pôle, cela étant je vais établir la relation:

$$F(x)-f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x-l)^\lambda}{(x-z)(z-a)^\alpha(z-b)^\beta\dots(z-l)^\lambda}\,dz$$

l'intégrale du second membre se rapportant au contour de S, et en même temps donner l'expression du polynôme cherché $F(x)$.

Faisons pour abréger:

$$\Phi(x) = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x-l)^\lambda$$

et:

$$\varphi(x) = \frac{f(z)\Phi(x)}{(x-z)\Phi(z)};$$

l'intégrale curviligne sera la somme des résidus de $\varphi(z)$ pour les valeurs: $z=a, b, \dots l$ et $z=x$. Le dernier de ces résidus est évidemment $-f(x)$; à l'égard des autres, en considérant pour fixer les idées, celui qui correspond à $z=a$ je vais le déterminer par le calcul du terme en $\frac{1}{h}$ dans le développement de $\varphi(a+h)$, suivant les puissances croissantes de h.

Observons d'abord qu'on a:

$$\Phi(a+h) = h^{\alpha}(a-b+h)^{\beta}(a-c+h)^{\gamma}\dots(a-l+h)^{\lambda}$$

de sorte qu'en posant:

$$(a-b+h)^{-\beta}(a-c+h)^{-\gamma}\dots(a-l+h)^{-\lambda} = A+A_1h+A_2h^2+\dots+A_{\alpha-1}h^{\alpha-1}+\dots$$

nous pourrons écrire:

$$\varphi(a+h) = \frac{f(a+h)\Phi(x)}{(x-a-h)h^{\alpha}}[A+A_1h+A_2h^2+\dots].$$

Effectuons ensuite le produit des deux séries:

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)\frac{h}{1}+f''(a)\frac{h^2}{1.2}+\dots+f^{\alpha-1}(a)\frac{h^{\alpha-1}}{1.2\dots\alpha-1}+\dots,$$

$$\frac{1}{x-a-h} = \frac{1}{x-a}+\frac{h}{(x-a)^2}+\frac{h^2}{(x-a)^3}+\dots+\frac{h^{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}}+\dots,$$

il est clair qu'on aura pour résultat:

$$\frac{f(a+h)}{x-a-h} = \frac{X_0}{x-a}+\frac{X_1h}{(x-a)^2}+\frac{X_2h^2}{(x-a)^3}+\dots+\frac{X_{\alpha-1}h^{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}}+\dots$$

X_i désignant un polynôme entier en x du degré i. Il en résulte que le résidu cherché, étant le coefficient de $h^{\alpha-1}$, dans le produit:

$$\Phi(x)[A+A_1h+A_2h^2+\dots+A_{\alpha-1}h^{\alpha-1}]$$
$$+\left[\frac{X_0}{x-a}+\frac{X_1h}{(x-a)^2}+\frac{X_2h^2}{(x-a)^3}+\dots+\frac{X_{\alpha-1}h^{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}}\right],$$

aura pour expression:

$$\Phi(x)\left[\frac{AX_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1X_{\alpha-2}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}X_0}{x-a}\right],$$

ou encore:

$$(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\dots(x-l)^{\lambda}[AX_{\alpha-1}+A_1X_{\alpha-2}(x-a)+\dots+A_{\alpha-1}X_0(x-a)^{\alpha-1}].$$

C'est donc à l'égard de la variable x, un polynôme entier de degré $\alpha+\beta+\dots+\lambda-1=n-1$; il en est de même des autres résidus de $\varphi(z)$, et par conséquent leur somme que je désignerai par $F(x)$ est bien un polynôme entier de degré $n-1$, dans la relation que nous venons d'obtenir:

$$F(x)-f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\Phi(x)}{(x-z)\Phi(z)}dz.$$

Observez maintenant que l'intégrale du second membre, renfermant comme facteur, sous le signe d'intégration la fonction $\Phi(x)$, s'annule ainsi que ses dérivées par rapport à x, jusqu'à l'ordre $\alpha-1$ pour $x=a$, jusqu'à l'ordre $\beta-1$, pour $x=b$, etc. Il est ainsi immédiatement mis en évidence que $F(x)$ est le polynôme cherché, toutes les conditions à remplir se trouvant en effet satisfaites. Mais de plus, nous obtenons une expression de la différence entre la fonction et le polynôme d'interpolation, sous une forme permettant de reconnaître qu'elle diminue sans limite, lorsque le nombre des quantités $a, b, \ldots l$, ou bien les exposants, $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, vont en augmentant. Effectivement, si nous admettons que tous les cercles passant par le point dont l'affixe est x et ayant pour centres les n points $a, b, \ldots l$ soient contenus à l'intérieur de S, les rayons de ces cercles, c'est-à-dire, les modules de $x-a$, $x-b$, $\ldots$ seront respectivement inférieurs aux modules des quantités $z-a$, $z-b$, $\ldots$ $z-l$, lorsque la variable z décrit le contour de l'aire. Le module du facteur $\frac{\Phi(x)}{\Phi(z)}$ entrant dans l'intégrale curviligne, peut ainsi devenir moindre que toute quantité donnée, lorsqu'on augmente le degré du polynôme $F(x)$.

Cette considération est d'ailleurs exactement celle dont on fait usage à l'égard du reste de la série de *Taylor*,

$$R = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)(x-a)^\alpha}{(x-z)(z-a)^\alpha}\,dz,$$

lorsqu'on veut établir la convergence de cette série pour des valeurs imaginaires de la variable. J'ajouterai cette remarque que la différentiation par rapport à a, donne:

$$\frac{dR}{da} = \frac{\alpha(x-a)^{\alpha-1}}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)dz}{(z-a)^{\alpha+1}}$$

de sorte que la formule:

$$f^{(\alpha)}(a) = \frac{1.2\ldots\alpha}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)dz}{(z-a)^{\alpha+1}}$$

permet d'écrire:

$$\frac{dR}{da} = \frac{(x-a)^{\alpha-1}f^{(\alpha)}(a)}{1.2\ldots\alpha-1}.$$

et l'on en conclut, R s'évanouissant pour $a=x$, la forme élémentaire du reste:

$$R = \int_x^a \frac{(x-a)^{\alpha-1}f^{(\alpha)}(a)da}{1.2\ldots\alpha-1}.$$

Après avoir rattaché à un même point de vue la série de *Taylor* et la formule d'interpolation de *Lagrange*, qui s'obtiennent comme on voit, en posant

$$\Phi(x) = (x-a)^\alpha, \quad \text{et} \quad \Phi(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

je vais considérer un nouveau cas et faire: $\Phi(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta$. Si l'expression du polynôme $F(x)$ devient alors plus compliquée, l'intégrale: $\int_a^b F(x)\,dx$ donne pour la valeur approchée de la quadrature $\int_a^b f(x)\,dx$, un résultat très-simple, auquel on parvient comme il suit.

Nommons A et B, les résidus correspondant à $z = a$ et $z = b$, de la fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z)(x-a)^\alpha (x-b)^\beta}{(x-z)(z-a)^\alpha (z-b)^\beta}$$

de sorte qu'on ait:

$$F(x) = A + B;$$

je montrerai d'abord, que les intégrales:

$$\mathfrak{A} = \int_a^b A\,dx, \quad \mathfrak{B} = \int_a^b B\,dx,$$

se déduisent immédiatement l'une de l'autre. Ces quantités sont en effet les coefficients de $\frac{1}{h}$, dans le développement des expressions:

$$\int_a^b \varphi(a+h)\,dx = \frac{f(a+h)}{h^\alpha (a-b+h)^\beta} \int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta\,dx}{x-a-h},$$

et

$$\int_a^b \varphi(b+h)\,dx = \frac{f(b+h)}{h^\beta (b-a+h)^\alpha} \int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta\,dx}{x-b-h}.$$

Or écrivons pour un moment:

$$(a,\ b,\ \alpha,\ \beta) = \frac{f(a+h)}{h^\alpha (a-b+h)^\beta} \int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta\,dx}{x-a-h},$$

et permutons à la fois, d'une part a et b, et de l'autre α et β, ce qui donnera:

$$(b,\ a,\ \beta,\ \alpha) = \frac{f(b+h)}{h^\beta (b-a+h)^\alpha} \int_b^a \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta\,dx}{x-b-h};$$

on voit que le second membre de cette égalité étant $-\mathfrak{B}$, on a simplement:

$$\int_a^b F(x)\,dx = (a,\ b,\ \alpha,\ \beta) - (b,\ a,\ \beta,\ \alpha).$$

Cette remarque faite, posons: $m = \alpha + \beta$, la formule élémentaire:

$$\int_a^b (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-1}\,dx = (b-a)^{p+q-1} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

donne le développement:

$$\int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx}{x-a-h} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+1)}(b-a)^m$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m)}(b-a)^{m-1}h$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha-2)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-1)}(b-a)^{m-2}h^2$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Faisons encore: $h=(b-a)t$, on pourra l'écrire sous cette nouvelle forme:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+1)}(b-a)^m\left[1+\frac{m}{\alpha-1}t+\frac{m(m-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}t^2+\cdots\right].$$

Cela étant nous effectuerons la multiplication par le facteur $(a-b+h)^{-\beta}$, ou plutôt par la quantité égale: $(-1)^\beta(b-a)^{-\beta}(1-t)^{-\beta}$. Des réductions qui se présentent d'elles-mêmes, montrent que le produit des deux séries:

$$1+\frac{m}{\alpha-1}t+\frac{m(m-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}t^3+\cdots,$$

$$1+\frac{\beta}{1}t+\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}t^2+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3}t^3+\cdots$$

a la forme simple:

$$T = 1+\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-1}t+\frac{\alpha(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.(\alpha-2)}t^2+\frac{\alpha(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{1.2.3.(\alpha-3)}t^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\alpha(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+\alpha-1)}{1.2.3\ldots\alpha-1}t^{\alpha-1}+\cdots$$

de sorte qu'on a:

$$\frac{1}{(a-b+h)^\beta}\int_a^b \frac{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta dx}{x-a-h} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+1)}(b-a)^\alpha T.$$

Mais il est préférable, en gardant seulement les puissances de h, dont l'exposant est inférieur à α, et qui nous seront seules utiles, d'ordonner le second membre suivant les puissances décroissantes de cette quantité. On obtient ainsi:

$$\frac{1}{(a-b+h)^\beta}\int_a^b \frac{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta dx}{x-a-h} = \frac{\alpha}{m}(b-a)h^{\alpha-1}$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)}\frac{(b-a)^2h^{\alpha-2}}{2}$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)}\frac{(b-a)^3h^{\alpha-3}}{3}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En dernier lieu, multiplions par le facteur:

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)\frac{h}{1}+f''(a)\frac{h^2}{1.2}+\cdots+f^{\alpha-1}(a)\frac{h^{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1}+\cdots$$

pour former le coefficient du terme en $h^{\alpha-1}$, qui est la quantité cherchée, nous parvenons ainsi à l'expression:

$$(a,\ b,\ \alpha,\ \beta) = \frac{\alpha}{m}(b-a)f(a)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)}\frac{(b-a)^2f'(a)}{1.2}$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)}\frac{(b-a)^3f''(a)}{1.2.3}+\cdots$$

dont la loi est manifeste.

On obtient d'une autre manière, cette formule en partant de la relation:

$$\int UV^m dx = \Theta(x)+(-1)^m\int VU^m dx,$$

où j'ai fait:

$$\Theta(x) = UV^{m-1}-U'V^{m-2}+U''V^{m-3}-\cdots.$$

Prenons en effet: $U=f(x)$, $V=(x-a)^\beta(x-b)^\alpha$, avec la condition $\alpha+\beta=m$, de sorte qu'on ait: $V^m=1.2\ldots m$. On en déduira en intégrant entre les limites $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Theta(b)-\Theta(a)}{1.2\ldots m}+\frac{(-1)^m}{1.2\ldots m}\int_a^b f^m(x)(x-a)^\beta(x-b)^\alpha dx,$$

et il est aisé de calculer $\Theta(a)$ et $\Theta(b)$. Il suffit en effet d'avoir les dérivées successives de $V=(x-a)^\beta(x-b)^\alpha$ pour $x=a$ et $x=b$; or les premières s'obtiennent en faisant $x=a+h$, et sont données par les coefficients de $h^\beta(a-b+h)^\alpha$; les autres résultent semblablement de l'expression $h^\alpha(b-a+h)^\beta$, et l'on trouve ainsi:

$$\frac{\Theta(a)}{1.2\ldots m} = \frac{\alpha}{m}(a-b)f(a)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)}\frac{(a-b)^2f'(a)}{1.2}$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)}\frac{(a-b)^3f''(a)}{1.2.3}-\cdots.$$

Ecrivons cette quantité de la manière suivante:

$$\frac{\Theta(a)}{1.2\ldots m} = -\frac{\alpha}{m}(b-a)f(a)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)}\frac{(b-a)^2f'(a)}{1.2}$$
$$-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)}\frac{(b-a)^3f''(a)}{1.2.3}-\cdots,$$

on aura de même:

$$\frac{\Theta(b)}{1.2\ldots m} = -\frac{\beta}{m}(a-b)f(b)-\frac{\beta(\beta-1)}{m(m-1)}\frac{(a-b)^2f'(b)}{1.2}$$
$$-\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{m(m-1)(m-2)}\frac{(a-b)^3f''(b)}{1.2.3}-\cdots$$

et nous sommes ramenés à la formule précédemment obtenue. Mais on trouve par cette méthode, que la différence entre l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ et sa valeur approchée est la quantité:

$$\frac{(-1)^m}{1.2\ldots m}\int_a^b f^m(x)(x-a)^\beta(x-b)^\alpha\,dx,$$

où le facteur $(x-a)^\beta(x-b)^\alpha$, conserve toujours le même signe entre les limites de l'intégration.

Ecrivant donc:

$$\int_a^b f^m(x)(x-a)^\beta(x-b)^\alpha\,dx = f^m(\xi)\int_a^b (x-a)^\beta(x-b)^\alpha\,dx,$$

en désignant par ξ une quantité comprise entre a et b, on voit que pour une valeur donnée de m, l'approximation obtenue dépend du facteur

$$\int_a^b (x-a)^\beta(x-b)^\alpha\,dx,$$

ce qui conduit à déterminer α et β par la condition qu'il soit le plus petit possible. Or on trouve aisément que le minimum du produit $\Gamma(x)\Gamma(m-x)$ s'obtient en faisant $x=\frac{m}{2}\cdot$ Parmi les diverses formules qui se rapportent à la même valeur de m, c'est donc celle où $\alpha=\beta$, où figure par conséquent la dérivée de l'ordre le moins élevé de la fonction $f(x)$, qui conduit en même temps à l'approximation la plus grande.

En particulier on trouvera pour $\alpha=\beta=1$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]-\tfrac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi),$$

puis en supposant: $\alpha=\beta=2$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] + \tfrac{1}{12}(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]+\tfrac{1}{720}(b-a)^5 f^{\mathrm{IV}}(\xi).$$

Paris, 5 juillet 1877.

Postscriptum.

J'ai réfléchi de nouveau à ces deux origines de la série de *Taylor*, suivant qu'on la déduit, au point de vue élémentaire, de l'intégrale définie:

$$\int_x^a \frac{(x-u)^\alpha f^{\alpha+1}(u)}{1.2\ldots\alpha}\,du,$$

ou bien sous un point de vue analytique plus étendu, de l'intégrale curviligne:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{(x-a)^{\alpha+1}f(z)}{(x-z)(z-a)^{\alpha+1}}\,dz,$$

et j'ai pensé qu'il devait être possible pareillement d'arriver au polynôme d'interpolation par une autre voie qui n'exigerait pas l'emploi des variables imaginaires et des intégrales curvilignes. C'est en effet ce qui a lieu, mais il faut recourir comme vous allez le voir à la considération des intégrales multiples. En posant:

$$\Pi(z) = (z-a_0)(z-a_1)\ldots(z-a_n)$$

j'envisage l'intégrale:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)}{\Pi(z)}\,dz$$

où la fonction $f(z)$ est supposée continue à l'intérieur de l'aire S, qui comprend tous les points ayant pour affixes $a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_n$.

Si l'on désigne par $f^n(z)$, la dérivée d'ordre n de $f(z)$, et qu'on fasse:

$$u = (a_0-a_1)t_1+(a_1-a_2)t_2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)t_n+a_n,$$

l'intégrale curviligne s'exprime comme il suit au moyen d'une intégrale multiple d'ordre n. On a:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)}{\Pi(z)}\,dz = \int_0^1 dt_n\int_0^{t_n} dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2}\ldots\int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1,$$

et nous allons aisément le démontrer.

Il vient d'abord en effet:

$$\int_0^{t_2} f^n(u)\,dt = \frac{f^{n-1}[(a_0-a_2)t_2+(a_2-a_3)t_3+\cdots+a_n]}{a_0-a_1}$$
$$+\frac{f^{n-1}[(a_1-a_2)t_2+(a_2-a_3)t_3+\cdots+a_n]}{a_1-a_0},$$

puis successivement:

$$\int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1$$

$$= \frac{f^{n-2}[(a_0-a_3)t_3+(a_3-a_4)t_4+\cdots+a_n]}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}$$

$$+\frac{f^{n-2}[(a_1-a_3)t_3+(a_3-a_4)t_4+\cdots+a_n]}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}$$

$$+\frac{f^{n-2}[(a_2-a_3)t_3+(a_3-a_4)t_4+\cdots+a_n]}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)},$$

$$\int_0^{t_4} dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1$$

$$= \frac{f^{n-3}[(a_0-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\cdots+a_n]}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}$$

$$+\frac{f^{n-3}[(a_1-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\cdots+a_n]}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

$$+\frac{f^{n-3}[(a_2-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\cdots+a_n]}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$$

$$+\frac{f^{n-3}[(a_3-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\cdots+a_n]}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)},$$

en faisant usage des identités élémentaires:

$$\frac{1}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}+\frac{1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}+\frac{1}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} = 0,$$

$$\frac{1}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}+\frac{1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

$$+\frac{1}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{1}{(a_3-a_0)(a_3-a_2)(a_3-a_1)} = 0.$$

En dernier lieu, et sans qu'il soit besoin d'entrer dans des détails que la simplicité des calculs rend inutiles, on obtient pour l'intégrale multiple d'ordre n, l'expression:

$$\frac{f(a_0)}{\Pi'(a_0)}+\frac{f(a_1)}{\Pi'(a_1)}+\cdots+\frac{f(a_n)}{\Pi'(a_n)},$$

qui est en effet la valeur de l'intégrale: $\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)}{\Pi(z)}\,dz$. Appliquons ce résultat en supposant $a_0 = x$, et faisons pour abréger:

$$\Phi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n);$$

si l'on désigne comme précédemment, par $F(x)$, le polynôme d'interpolation de *Lagrange*, on trouvera:

$$f(x)-F(x) = \Phi(x)\int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1,$$

la valeur de u pouvant être mise sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} u = xt_1 &+ a_1(t_2-t_1) \\ &+ a_2(t_3-t_2) \\ &\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &+ a_{n-1}(t_n-t_{n-1}) \\ &+ a_n(1-t_n). \end{aligned}$$

Je remarque ensuite qu'en différentiant la relation:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)}{(z-x)\Phi(z)}dz = \int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1$$

$\alpha-1$ fois par rapport à a_1, $\beta-1$ fois par rapport à a_2, ... $\lambda-1$ fois par rapport à a_n, nous obtiendrons dans le premier membre l'intégrale:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\dots\Gamma(\lambda)f(z)}{(z-x)(z-a_1)^\alpha(z-a_2)^\beta\dots(z-a_n)^\lambda}dz,$$

qui se trouvera donc exprimée par l'intégrale multiple:

$$\int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} f^\sigma(u)\,\Theta\,dt_1,$$

où j'ai fait:

$$\Theta = (t_2-t_1)^{\alpha-1}(t_3-t_2)^{\beta-1}\dots(1-t_n)^{\lambda-1},$$
$$\sigma = \alpha+\beta+\dots+\lambda.$$

Nous parvenons ainsi pour la formule plus générale d'interpolation, à l'expression suivante du reste:

$$f(x)-F(x) = \frac{\Phi(x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\dots\Gamma(\lambda)}\int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} f^{\alpha+\beta+\dots+\lambda}(u)\,\Theta\,dt_1,$$

$\Phi(x)$ représentant le polynôme: $(x-a_1)^\alpha(x-a_2)^\beta\dots(x-a_n)^\lambda$, c'est le résultat que je me suis proposé d'obtenir et qui me semble compléter sous un point de vue essentiel la théorie élémentaire de l'interpolation.

Bain-de-Bretagne, septembre 1877.