Jahresbericht d. Deutschen Math.-Verein, 19 (1910), 104-112

tität," einer Identität, bei der eine Reihe p_ϱ in die einzelnen Reihen x zerlegt wird. Den einfachsten Spezialfall der Zerlegungsidentität benutzte schon Clebsch in seiner „Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie" zur Ableitung der Elementarkovarianten bei den Reihenentwicklungen. Mit Hilfe dieser Identitäten, die den Übergang von den nicht expliziten Determinantenausdrücken zum Matrizenprodukt vermitteln, läßt sich nun in der Tat nachweisen, daß mit der Matrizendarstellung die gewünschte explizite symbolische Darstellung gewonnen ist.

Für den Faltungsprozeß aber gilt ein ganz analoger Satz wie im ternären Gebiet, auf den sich auch analog die Reduktionssätze aufbauen lassen. Bezeichnet man in (1) die Zahl λ als Defekt der Faltung, und Faltungen, für die $\sigma = \tau$, als kogredient, *so lassen sich alle Faltungen erzeugen durch sukzessive Anwendung der kogredienten Faltungen vom Defekt 1.* Der Beweis dieses Satzes beruht wesentlich darauf, daß man die allgemeinsten Formen durch „Normalformen" ersetzen kann, d. h. durch Formen, die bei Anwendung aller invarianten Differentialoperationen identisch verschwinden. Im quaternären Gebiet hat diese letztere Tatsache Herr Mertens[1]) bewiesen; unsere Kenntnis der allgemeinsten Differentialoperationen — die bekanntlich aus den Faltungsprozessen durch Ersetzen der Symbolreihen durch Differentialsymbole hervorgehen — gestattet uns, unter Anwendung der Zerlegungsidentität den Mertensschen Beweis fast wörtlich auf das n-äre Gebiet zu übertragen.

Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar.

Von GEORG FABER in Tübingen.

In seiner interessanten Dissertation[2]) hat Herr Haar ein System von Funktionen

$$(1)\quad \chi_0(s);\ \chi_1(s);\ \chi_2^{(1)}(s),\ \chi_2^{(2)}(s);\ \chi_3^{(1)}(s),\ \chi_3^{(2)}(s),\ \chi_3^{(3)}(s),\ \chi_3^{(4)}(s), \dots \chi_n^{(k)}(s) \dots \quad (k = 1, 2, \dots 2^{n-1})$$

aufgestellt, welche im Intervalle $0 < s < 1$ eindeutig definiert sind und der „Orthogonalitätsbedingung"

$$(2)\quad \int_0^1 \chi_n^{(k)}(s)\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)\,ds = 0$$

1) Über invariante Gebilde quaternärer Formen. Wiener Berichte. Bd. 98. 1889.

2) Göttingen 1909; s. Kapitel III, S. 37.

genügen, sobald nicht gleichzeitig $n = \nu$, $k = \varkappa$ ist, samt der Nebenbedingung

$$(3)\quad \int_0^1 (\chi_n^k(s))^2\,ds = 1$$

für alle möglichen n, k und welche weiter die Eigenschaft haben, daß jede im Intervalle $0 \leq s \leq 1$ stetige Funktion $f(s)$ sich durch eine gleichmäßig konvergente unendliche Reihe

$$(4)\quad f(s) = a_0\chi_0(s) + a_1\chi_1(s) + a_2^{(1)}\chi_2^{(1)}(s) + a_2^{(2)}\chi_2^{(2)}(s) + a_3^{(1)}\chi_3^{(1)}(s) + \cdots$$

darstellen läßt, wo die Koeffizienten $a_n^{(k)}$ durch die Bezeichnung

$$(5)\quad a_n^{(k)} = \int_0^1 f(s)\chi_n^{(k)}(s)\,ds$$

bestimmt sind.

Die Haarschen Orthogonalfunktionenreihen sind darnach den Fourierschen Reihen insofern überlegen, als erstere zur Darstellung *jeder* stetigen Funktion geeignet sind, während es bekanntlich stetige Funktionen mit divergenter Fourier-Reihe gibt.

Es interessiert vielleicht die Leser des Jahresberichts, wenn ich im folgenden eine neue sehr einfache und anschauliche Ableitung der Haarschen Resultate veröffentliche.

Mein Beweisverfahren gestattet zugleich das Verhalten der Entwicklung unstetiger Funktionen an einfachen Sprungstellen klarzulegen; der hierüber von Herrn Haar (S. 45/46 der Dissertation) ohne Beweis mitgeteilte Satz ist nicht richtig.

Endlich beantworte ich noch, über Herrn Haar hinausgehend, folgende Frage:

Gibt es außer der mit den Koeffizienten (5) gebildeten Reihe (4) noch andere im Intervall $0 \leq s < 1$ im allgemeinen konvergente Darstellung der Funktion $f(s)$ durch Reihen

$$(6)\quad f(s) = b_0\chi_0(s) + b_1\chi_1(s) + b_2^{(1)}\chi_2^{(1)}(s) + b_2^{(2)}\chi_2^{(2)}(s) + b_3^{(1)}\chi_3^{(1)}(s) + \cdots$$

(wo also für gewisse n, k: $b_n^{(k)} \neq a_n^{(k)}$ ist).

Es stellt sich heraus, daß die Darstellung (4) mit den Koeffizienten (3) die einzige im Intervall $0 < s < 1$ *gleichmäßig* konvergente ist, daß es aber noch unendlich viele andere Darstellungen (6) gibt, die überall, außer an einer *endlichen* Anzahl von Stellen gegen $f(s)$ konvergieren.

Etwas anders ausgedrückt:

Sieht man von einer endlichen Anzahl von Divergenzstellen ab, so gibt es Darstellungen der Null durch Haarsche Orthogonalfunktionenreihen mit nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten.

Auch in dieser Hinsicht zeigen also die Haarschen Orthogonalfunktionenreihen ein ganz anderes Verhalten wie die trigonometrischen Reihen; ob es *durchweg* konvergente Darstellungen der Null gibt, konnte ich nicht entscheiden, bezweifle es aber.

Ich bezeichne $\int_0^s f(s)\,ds$ mit $F(s)$ und denke mir in einem rechtwinkligen y, s-Koordinatensystem die Kurve $y = F(s)$; dieser Kurve beschreibe ich Polygone ein mit Ecken in den Punkten $s = \frac{k}{2^n}$ $(k = 0, 1, \ldots 2^n)$, und zwar gehe ich folgendermaßen schrittweise vor:[1]

$y = P_0(s)$ ist die Gerade, die den Punkt $s = 0$, $y = F(0) = 0$ mit $s = 1$, $y = F(1)$ verbindet;

$y = P_1(s)$ ist der Linienzug, der den Punkt $s = 0$, $y = 0$ mit $s = \frac{1}{2}$, $y = F(\frac{1}{2})$, diesen mit $s = 1$, $y = F(1)$ verbindet;

$y = P_2^{(1)}(s)$ stimmt mit $y = P_1(s)$ überein, nur ist die Strecke zwischen $s = 0$ und $s = \frac{1}{2}$ in 2 Strecken, die in $s = \frac{1}{4}$, $y = F(\frac{1}{4})$ aneinanderstoßen, aufgelöst;

$y = P_2^{(2)}(s)$ stimmt mit $y = P_2^{(1)}(s)$ überein, nur ist die Strecke zwischen $s = \frac{1}{2}$ und $s = 1$ in 2 Strecken, die in $s = \frac{3}{4}$, $y = F(\frac{3}{4})$ aneinanderstoßen, aufgelöst;

$y = P_3^{(1)}(s)$ stimmt mit $y = P_2^{(2)}(s)$ überein, nur ist die Strecke zwischen $s = 0$ und $s = \frac{1}{4}$ in 2 Strecken, die in $s = \frac{1}{8}$, $y = F(\frac{1}{8})$ aneinanderstoßen, aufgelöst;

$y = P_3^{(2)}(s)$ stimmt mit $y = P_3^{(1)}(s)$ überein, nur ist die Strecke zwischen $s = \frac{1}{4}$ und $s = \frac{1}{2}$ in 2 Strecken, die in $s = \frac{3}{8}$, $y = F(\frac{3}{8})$ aneinanderstoßen, aufgelöst

usw. usw.

Allgemein besteht der gebrochene Linienzug $y = P_n^{(k)}(s)$ für $k < 2^{n-1}$ zwischen $s = 0$ und $s = \frac{k}{2^{n-1}}$ aus dem der Kurve $y = F(s)$ einbeschriebenen Polygon, das seine Ecken in den zu $s = 0$, $s = \frac{1}{2^n}$, $s = \frac{2}{2^n} \cdots s = \frac{2k}{2^n}$ gehörigen Ordinaten hat; zwischen $s = \frac{k}{2^{n-1}}$ und $s = 1$ dagegen besteht der gebrochene Linienzug $y = P_n^{(k)}(s)$ aus dem der Kurve $y = F(s)$ einbeschriebenen Polygon, das seine Ecken in den zu $s = \frac{k}{2^{n-1}}$, $s = \frac{k+1}{2^{n-1}}, \cdots s = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}$ gehörigen Ordinaten hat.

1) Man mache sich während des Lesens eine Skizze.

Ich führe nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\varphi_0(s) = P_0(s);$$
$$\varphi_1(s) = P_1(s) - P_0(s);$$
$$\varphi_2^{(1)}(s) = P_2^{(1)}(s) - P_1^{(1)}, \quad \varphi_2^{(2)}(s) = P_2^{(2)}(s) - P_2^{(1)}(s);$$
$$\varphi_3^{(1)}(s) = P_3^{(1)}(s) - P_2^{(2)}(s) \ldots \varphi_3^{(4)}(s) = P_3^{(4)}(s) - P_3^{(3)}(s)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n^{(1)}(s) = P_n^{(1)}(s) - P_{n-1}^{(2^{n-2})}(s), \quad \varphi_n^{(2)}(s) = P_n^{(2)}(s) - P_n^{(1)}(s) \ldots$$
$$\varphi_n^{(2^{n-1})}(s) = P_n^{(2^{n-1})}(s) - P_n^{(2^{n-1}-1)}(s).$$

Man erhält dann für $y = P_n^{(k)}(s)$ die folgende Darstellung, welche das allmähliche Entstehen dieses Linienzugs deutlich hervortreten läßt:

$$(7) \qquad y = P_n^{(k)}(s) = \varphi_0(s) + \varphi_1(s) + \varphi_2^{(1)}(s) + \varphi_2^{(2)}(s) + \varphi_3^{(1)}(s) + \varphi_3^{(2)}(s) + \varphi_3^{(3)}(s) + \varphi_3^{(4)}(s) + \varphi_4^{(1)}(s) + \cdots + \varphi_n^{(k)}(s).$$

Die Kurve $y = \varphi_\nu^{(\varkappa)}(s)$ fällt überall mit der s-Achse zusammen, außer über der Strecke $\left(\frac{\varkappa-1}{2^{\nu-1}}, \frac{\varkappa}{2^{\nu-1}}\right)$, wo sie aus den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks besteht, dessen Höhe senkrecht zur s-Achse

$$(8) \qquad h_\nu^{(\varkappa)} = F\left(\frac{2\varkappa-1}{2^\nu}\right) - \frac{F\left(\frac{\varkappa-1}{2^{\nu-1}}\right) + F\left(\frac{\varkappa}{2^{\nu-1}}\right)}{2}$$

ist; je nachdem $h_\nu^{(\varkappa)}$ positiv oder negativ ausfällt, verläuft der Linienzug $y = \varphi_\nu^{(\varkappa)}(s)$ oberhalb oder unterhalb der s-Achse. Ich setze noch:

$$(9) \qquad \varphi_\nu^{(\varkappa)}(s) = h_\nu^{(\varkappa)} \sqrt{2^{\nu+1}}\, \psi_\nu^{(\varkappa)}(s) = a_\nu^{(\varkappa)} \psi_\nu^{(\varkappa)}(s), \quad \text{mithin } a_\nu^{(\varkappa)} = h_\nu^{(\varkappa)} \cdot \sqrt{2^{\nu+1}},$$

wo also $\psi_\nu^{(\varkappa)}(s)$ genau so wie $\varphi_\nu^{(\varkappa)}(s)$ definiert ist, nur daß die Höhe des zugehörigen gleichschenkligen Dreiecks $= \frac{1}{\sqrt{2^{\nu+1}}}$ ist; nur $y = \psi_0(s)$ stellt kein Dreieck dar, sondern die Gerade $y = s$ zwischen 0 und 1.

Die Gleichung (7) nimmt jetzt folgende Form an:

$$(9') \quad P_n^{(k)}(s) = a_0\psi_0(s) + a_1\psi_1(s) + a_2^{(1)}\psi_2^{(1)}(s) + a_2^{(2)}\psi_2^{(2)}(s) + a_3^{(1)}\psi_3^{(1)}(s) + \cdots + a_n^{(k)}\psi_n^{(k)}(s),$$

wo

$$(10) \qquad a_\nu^{(\varkappa)} = \left(\frac{F\left(\frac{2\varkappa-1}{2^\nu}\right) - F\left(\frac{\varkappa-1}{2^{\nu-1}}\right)}{2} - \frac{F\left(\frac{\varkappa}{2^{\nu-1}}\right) - F\left(\frac{2\varkappa-1}{2^\nu}\right)}{2}\right)\sqrt{2^{\nu+1}} \qquad \text{(vgl. (8))}$$

$$= \left|\int_{\frac{\varkappa-1}{2^{\nu-1}}}^{\frac{2\varkappa-1}{2^\nu}} f(s)\,ds - \int_{\frac{2\varkappa-1}{2^\nu}}^{\frac{\varkappa}{2^{\nu-1}}} f(s)\,ds\right| \cdot \sqrt{2^{\nu-1}}$$

$$= \int_0^1 f(s)\,\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)\,ds,$$

wenn die Funktion $\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)$ folgendermaßen definiert wird:

$$(11)\quad \begin{cases} \text{zwischen } 0 \text{ und } \frac{\varkappa - 1}{2^{\nu-1}} : \chi_\nu^{(\varkappa)}(s) = 0, \\ \text{zwischen } \frac{\varkappa}{2^{\nu-1}} \text{ und } 1 : \chi_\nu^{(\varkappa)}(s) = 0, \\ \text{zwischen } \frac{\varkappa - 1}{2^{\nu-1}} \text{ und } \frac{2\varkappa - 1}{2^{\nu}} : \chi_\nu^{(\varkappa)}(s) = +\sqrt{2^{\nu-1}}, \\ \text{zwischen } \frac{2\varkappa - 1}{2^{\nu}} \text{ und } \frac{\varkappa}{2^{\nu-1}} : \chi_\nu^{(\varkappa)}(s) = -\sqrt{2^{\nu-1}}. \quad (\chi_0(s) = 1.) \end{cases}$$

Zur Vervollständigung der Definition möge an einer Unstetigkeitsstelle a der Funktionswert $\chi_\nu^{(\varkappa)}(a)$ durch $\frac{\chi_\nu^{(\varkappa)}(a+0) + \chi_\nu^{(\varkappa)}(a-0)}{2}$ fortgesetzt werden, also:

$$(12)\quad \chi_\nu^{(\varkappa)}\left(\frac{\varkappa-1}{2^{\nu-1}}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2^{\nu-1}},\quad \chi_\nu^{(\varkappa)}\left(\frac{2\varkappa-1}{2^{\nu}}\right) = 0,\quad \chi_\nu^{(\varkappa)}\left(\frac{\varkappa}{2^{\nu-1}}\right) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2^{\nu-1}}.$$

Man sieht ohne weiteres, daß diese Funktionen $\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)$ die Orthogonalitätsbedingung (2) *samt der Nebenbedingung* (3) *erfüllen.*

Ferner gilt offenbar an den Stetigkeitsstellen von $\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)$:

$$(13)\quad \frac{d\psi_\nu^{(\varkappa)}(s)}{ds} = \chi_\nu^{(\varkappa)}(s).$$

Man erhält somit überall außer an den Stellen s, die zu Ecken des Linienzugs $y = P_n^{(k)}(s)$ gehören, durch Differentiation von (9'):

$$(14)\quad \frac{dP_n^{(k)}(s)}{ds} = a_0\chi_0(s) + a_1\chi_1(s) + a_2^{(1)}\chi_2^{(1)}(s) + \cdots + a_n^{(k)}\chi_n^{(k)}(s)$$

$$= \left(\frac{dF(s)}{ds}\right)_{s=s'}$$ (nach dem Rolleschen Satze, angewandt auf die differenzierbare Funktion $F(s) = \int_0^s f(s)ds$,

$$= f(s');$$ der Punkt mit der Abszisse s' liegt auf dem gleichen geradlinigen Stück von $y = P_n^{(k)}(s)$ wie jener mit der Abszisse s, so daß also $|s - s'| < \frac{1}{2^{\nu-1}}$ ist).

An den Stellen s, die zu Ecken von $y = P_n^{(k)}(s)$ gehören, hat die linke Seite von (14) überhaupt keinen Sinn, die rechte stellt wegen der Festsetzung der Werte von $\chi_\nu^{(k)}(s)$ an den Sprungstellen das arithmetische Mittel zwischen den Werten für $s+0$ und $s-0$ dar, also wegen des Rolleschen Satzes: $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dF(s)}{ds}\right)_{s=s'} + \left(\frac{dF(s)}{ds}\right)_{s=s''}\right) = \frac{1}{2}(f(s') + f(s''))$, wo $|s - s'| < \frac{1}{2^{\nu-1}}$ und $|s - s''| < \frac{1}{2^{\nu-1}}$ ist.

Bezeichnet man also mit ε_ν das Maximum der Differenzen $|f(s_1) - f(s_2)|$, solange $0 \leq s_1 < s_2 \leq 1$ und $s_2 - s_1 < \frac{1}{2^{\nu-1}}$ ist, so hat man den Satz:

Bricht man die mit den Koeffizienten (10) *gebildete Reihe* (4):

$$a_0\chi_0(s) + a_1\chi_1(s) + \cdots$$

nach dem Gliede $a_\nu^{(\varkappa)}\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)$ ab, so stellt die erhaltene Summe den Funktionswert $f(s)$ mit einem Fehler $< \varepsilon_\nu$ dar; dies gilt gleichmäßig für alle s des Intervalls $0 < s \leq 1$.

Damit ist das Hauptresultat des Herrn Haar bewiesen.

Setzt man $f(s)$ nicht als stetig, sondern nur als integrierbar voraus, so sieht man auf dem gleichen Wege ein, daß die Reihe (4) nach $\frac{dF(s)}{ds}$ konvergiert, falls der letztere Grenzwert existiert, was z. B. an allen Stetigkeitsstellen von $f(s)$ der Fall ist.

Ferner gilt:

Ist $f(s)$ integrierbar, so erhält man $F(s) = \int_0^s f(s)ds$ durch gliedweise Integration der Reihe (4), gleichviel ob letztere konvergiert oder nicht. Denn durch Integration der nach dem Gliede $a_n^{(k)}\chi_n^{(k)}(s)$ abgebrochenen Reihe (4) erhält man die Funktion $P_n^{(k)}(s)$, durch welche das mehrfach benutzte der Kurve $y = F(s)$ einbeschriebene Polygon dargestellt wird; andererseits ist wegen der Stetigkeit von $F(s)$ gleichmäßig für alle s des Intervalls $0 < s < 1$:

$$\lim_{n=\infty} P_n^{(k)}(s) = F(s).$$

Sind daher für eine Funktion $f(s)$ sämtliche Konstante $a_n^{(k)}$ gleich Null, so ist auch $F(s) = 0$, und damit auch $f(s)$ bis auf eine für die Integration unerhebliche Menge von Stellen. (In dieser Formulierung gilt die Aussage sowohl für Riemannsche wie für Lebesguesche Integration.) [Sog. „Vollständigkeitssatz“ für das Orthogonalsystem.]

Man kann das vorausgehende Beweisverfahren auch benutzen, um die Annäherung der nach irgendeinem Gliede abgebrochenen Reihe an $f(s)$ genauer zu untersuchen, was insbesondere auch für den Fall eines endlichen Sprunges an $f(s)$ geschehen soll. Bricht man die Reihe (4) z. B. nach dem Gliede $a_\nu^{(2^{\nu}-1)}\chi_\nu^{(2^{\nu}-1)}(s)$ ab, so stellt die erhaltene endliche Summe $2^{\nu-1}$ Strecken parallel zur s-Achse dar, jede von der Länge $\frac{1}{2^{\nu-1}}$ und jede schneidet, falls $f(s)$ stetig ist, die Kurve $y = f(s)$ in mindestens einem Punkt; den dem Schnittpunkt zugehörigen s-Wert s' findet man folgendermaßen: jeder jener Parallelen entspricht eine Sehne der Kurve $y = F(s)$, und es gibt zu jeder Sehne mindestens einen Punkt, auf dem zu der Sehne gehörigen Bogen von $y = F(s)$, in welchem die Tangente parallel zu besagter Sehne ist; die Abszisse dieses Punktes ist der gesuchte Wert s'.

Um das Verhalten der „Näherungskurven“

$$y = a_0\chi_0(s) + a_1\chi_1(s) + \cdots + a_\nu^{(\varkappa)}\chi_\nu^{(\varkappa)}(s) \tag{15}$$

an einer Unstetigkeitsstelle zu untersuchen, betrachte ich das Beispiel folgender Funktion $f(s)$: in der einen Umgebung der Stelle $s = a$ $(0 < a < 1)$ sei $f(s)$ auf eine gewisse Strecke konstant $= +1$, in der rechten Umgebung konstant $= -1$; im übrigen sei $f(s)$ stetig. Jede Funktion, die an der Stelle $s = a$ die gleiche Singularität wie $f(s)$ aufweist, entsteht aus $C \cdot f(s)$ durch Addition einer bei $s = a$ stetigen Funktion; es genügt also vollkommen, das eine Beispiel zu betrachten. Die Kurve $y = F(s)$ hat an der Stelle $s = a$ eine Ecke, an der 2 Gerade mit Neigungen von 45^0 und 135^0 gegen die s-Achse zusammenstoßen.

Ist a dyadisch rational, so fallen die der Kurve $y = F(s)$ einbeschriebenen Polygone in der Umgebung von $s = a$ mit $y = F(s)$ schließlich zusammen, und so fallen auch schließlich die Näherungskurven (15) in der Umgebung von $s = a$ mit $y = f(s)$ zusammen, während sie an der Stelle $s = a$ selbst gemäß den über die Unstetigkeiten der Funktionen χ gemachten Festsetzungen den Wert 0, im allgemeinen Fall also den Wert $\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2}$ annehmen.

Ist dagegen a nicht dyadisch rational, so bestehen die Kurven $y = P_n^{(k)}(s)$ in der Umgebung der Stelle $s = a$ jedesmal aus einem Geradenstück, von dem man nur weiß, daß seine Neigung α zur s-Achse zwischen 45^0 und 135^0 liegt, und die Näherungskurve (15) besteht dementsprechend bei $s = a$ aus einem Stück der Geraden $y = \operatorname{arc\,tg} \alpha$, die Näherung (15) nimmt also an der Stelle $s = a$ irgendeinen Wert zwischen -1 und $+1$ an; allgemein also kann man schließen, daß die unendliche Reihe (4) an der Stelle a nicht eigentlich divergiert, sondern zwischen Unbestimmtheitsgrenzen oszilliert, die zwischen $f(a+0)$ und $f(a-0)$ liegen, und die nur von a, $f(a+0)$, $f(a-0)$ abhängen.

Dieses Oszillieren läßt sich an der Hand der dyadischen Entwicklung der Zahl a leicht mehr ins einzelne verfolgen; insbesondere sieht man leicht ein, daß sich *nur* bei *dyadisch rationalem* a ein bestimmter Grenzwert ergibt, während bei einem *anderen rationalen* Wert von a die Schnittpunkte der unendlich vielen Näherungskurven (15) mit der Geraden $s = a$ auf dieser eine *endliche* Anzahl (> 1) von Häufungsstellen besitzen; ist a irrational, so ist die Menge dieser Häufungsstellen *unendlich*.

Hier wurde angenommen, daß a im Innern des Intervalls (0, 1) liegt; ist dagegen beispielsweise $a = 1$ eine einfache Sprungstelle für $f(s)$, d. h. existiert der Grenzwert $f(1-0)$ und ist $f(1)$ davon verschieden, so konvergiert die Reihe nach $f(1-0)$.

Daß es außer der Reihe (4) keine zweite *gleichmäßig* konvergente Darstellung

$$f(s) = \sum b_\nu^{(\varkappa)}\chi_\nu^{(\varkappa)}(s) \tag{16}$$

geben kann, sieht man ohne weiteres ein; multipliziert man nämlich beide Seiten von (16) mit $\chi_n^{(k)}(s)$ und integriert man zwischen 0 und 1, so darf man auf der rechten Seite die Integration gliedweise ausführen und erhält so

$$b_n^{(k)} = \int_0^1 f(s)\chi_n^{(k)}(s)\,ds, \tag{17}$$

also $b_n^{(k)} = a_n^{(k)}$ (5).

Es gibt also auch keine gleichmäßig konvergente Darstellung der Null durch eine Reihe $\sum c_\nu^{(\varkappa)}\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)$, in der nicht alle $c_\nu^{(\varkappa)} = 0$ wären.

Dagegen gibt es, wie ich zum Schluß noch zeigen will, unendlich viele (sogar unendlich viele voneinander linear unabhängige) überall bis auf eine endliche Anzahl von Stellen konvergente Nullentwicklungen

$$\sum c_\nu^{(\varkappa)}\chi_\nu^{(\varkappa)}(s) \equiv 0. \tag{18}$$

Es genügt, eine solche Entwicklung anzugeben, nach deren Muster sich unzählig viele andere davon linear unabhängige bilden lassen:

$$c_0 = 0;\ c_1 = 1;\ c_2^{(1)} = -1 = c_2^{(2)} = -1;\ c_3^{(1)} = 0,\ c_3^{(2)} = c_3^{(3)} = -1;\ c_3^{(4)} = 0, \tag{19}$$

allgemein:

$$c_\nu^{(\varkappa)} = -\sqrt{2^{\nu-3}} \quad \text{für} \quad \varkappa = 2^{\nu-2} \quad \text{und} \quad \varkappa = 2^{\nu-2} + 1,$$

$$c_\nu^{(\varkappa)} = 0$$

für alle anderen Werte von $\varkappa$. (Man mache sich eine Skizze über den Verlauf der ersten Näherungskurven.)

Faßt man jedesmal die beiden zu dem gleichen unteren Index ν gehörigen Glieder der Reihe $\sum c_\nu^{(\varkappa)}\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)$ zu einem einzigen zusammen, so erzielt man auch an der Stelle $s = \frac{1}{2}$ Konvergenz nach dem Grenzwerte Null; die Konvergenz ist aber eine ungleichmäßige.

Ein interessantes Beispiel erhält man auch, indem man die mit den Koeffizienten (19) gebildete Reihe integriert; es ist nämlich nicht für jedes s

$$\int_0^s \left(\sum c_\nu^{(\varkappa)}\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)\right) ds = \sum c_\nu^{(\varkappa)} \int_0^s \chi_\nu^{(\varkappa)}(s)\,ds; \tag{20}$$

die linke Seite ist durchweg $= 0$, während die rechte Null ist, außer für $s = \frac{1}{2}$, wo sie den Wert 1 annimmt.

Die Funktionen $\psi_\nu^{(\varkappa)}(s) = \int_0^s \chi_\nu^{(\varkappa)}(s)\,ds$ sind ebenfalls zur Entwicklung einer beliebigen stetigen Funktion $f(s)$ in eine Reihe

$$f(s) = f(0) + \sum c_\nu^{(\varkappa)} \psi_\nu^{(\varkappa)}(s) \tag{21}$$

geeignet; und zwar sind die Koeffizienten $c_\nu^{(\varkappa)}$ *völlig eindeutig bestimmt, und die Entwicklung ist stets gleichmäßig konvergent.*

Der Koeffizient $c_0 = f(1)$ ist nämlich durch den Funktionswert $f(1)$ völlig bestimmt; wird für c_0 ein anderer Wert angenommen, so läßt sich dies nicht mehr durch geeignete Wahl der übrigen $c_\nu^{(\varkappa)}$ gut machen, da die Funktionen $\psi_\nu^{(\varkappa)}$ außer ψ_0 an der Stelle $s = 1$ verschwinden.

Ebenso ist dann $c_1 = \frac{f(0) + f(1)}{2} - f(\frac{1}{2})$ durch den Funktionswert $f(\frac{1}{2})$ eindeutig bestimmt usw. (vgl. Gl. (8)); die *gleichmäßige* Konvergenz von (21) folgt ohne weiteres daraus, daß die Näherungskurven der Kurve $y = f(s)$ einbeschriebene Polygone sind, die gleichmäßig gegen $y = f(s)$ konvergieren.

Verzichtet man aber auf die Übereinstimmung der beiden Seiten von (21) an einer endlichen Anzahl von Stellen, so sind die Koeffizienten $c_\nu^{(\varkappa)}$ nicht eindeutig bestimmt, und es gibt mithin Darstellungen der Null mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmestellen, z. B. die mit den Koeffizienten (19) gebildete Reihe $\sum c_\nu^{(\varkappa)} \psi_\nu^{(\varkappa)}(s)$.

Karlsruhe, den 27. August 1909.

Über Kurvenscharen, die zu einem gegebenen Differentialausdrucke kovariant sind.[1]

Von FRIEDRICH ENGEL in Greifswald.

Durch die bekannte Transformation des Ausdruckes:

$$\delta \int \omega(x, y, y', \ldots y^{(n)})\,dx$$

liefert die Variationsrechnung eine Differentialgleichung, die gegenüber allen Punkttransformationen, ja sogar gegenüber allen Berührungstransformationen zu dem Differentialausdrucke ωdx kovariant ist. Es soll hier gezeigt werden, daß diese Differentialgleichung nur das erste Glied einer Kette von unendlich vielen kovarianten Differentialgleichungen ist.

1) Vorgetragen auf der Salzburger Versammlung am 22. 9. 1909.

Gegeben sei der Differentialausdruck:

$$ds = \omega(x, y, y')\,dx, \tag{1}$$

der als ein Bogenelement aufgefaßt werden möge. Ferner sei eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = \vartheta(x, y, y')$$

gegeben und es sei:

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0) \tag{2}$$

ihre durch das Linienelement x_0, y_0, y'_0 gehende Integralkurve. Die Bogenlänge s dieser Integralkurve sei so gewählt, daß sie für $x = x_0$ den Wert s_0 habe, also

$$s = \int_{x_0}^{x} \omega(x, y, y')\,dx + s_0$$

oder ausgerechnet:

$$s = S(x, x_0, y_0, y'_0) + s_0, \tag{3}$$

wo S für $x = x_0$ verschwindet.

Durch ein beliebiges unendlich benachbartes Linienelement $x_0 + dx_0$, $y_0 + dy_0$, $y'_0 + dy'_0$ legen wir ebenfalls die hindurchgehende Integralkurve und setzen fest, daß zu dem Punkte $x_0 + dx_0$, $y_0 + dy_0$ die Bogenlänge $s_0 + ds_0$ gehöre. Bezieht sich dann die Operation δ bloß auf die Größen x_0, y_0, y'_0, s_0, so bestimmt die Gleichung:

$$\delta y = 0 \tag{4}$$

den Schnittpunkt der beiden unendlich benachbarten Integralkurven, und die Gleichung:

$$\delta s = 0 \tag{5}$$

sagt aus, daß zu diesem Schnittpunkte auf beiden Integralkurven dieselbe Bogenlänge gehören soll. Denkt man sich daher x aus (4) und (5) eliminiert, so erhält man eine Mongesche Gleichung:

$$\psi(x_0, y_0, y'_0, dx_0, dy_0, dy'_0, ds_0) = 0, \tag{6}$$

und die hierdurch bestimmte Größe ds_0 ist offenbar nichts andres als der Unterschied zwischen den Bogenlängen beider Kurven, diese Bogenlängen von den Punkten x_0, y_0 und $x_0 + dx_0$, $y_0 + dy_0$ bis zum Schnittpunkte gerechnet.

Ist eine beliebige Differentialgleichung: $y'' = \vartheta(x, y, y')$ gegeben, so kann man über die Form der Gleichung (6) im allgemeinen nichts aussagen, solange man die Gleichung (2) nicht kennt. Man kann aber umgekehrt der Gleichung (6) eine Form vorschreiben und sich