ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 20 B. N:o 4.

Sur un théorème de Weierstrass.

Par

TORSTEN CARLEMAN.

Avec 1 figure.

Communiqué le 12 octobre 1927.

Dans un travail intitulé: Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente (Ges. Werke Bd. III. 1.), WEIERSTRASS a énoncé et demontré le théorème suivant. Étant donnée une fonction $f(x)$, continue en chaque point fini de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, on peut toujours (et d'une infinité de manières) trouver une suite de fonctions entières $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) \ldots$ telle que la série

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots \varphi_n(x) + \cdots$$

converge uniformément vers $f(x)$ dans tout intervalle fini de l'axe réel.

Nous nous proposons de faire voir que *l'on peut choisir les fonctions entières $\varphi_\nu(x)$ de façon que la convergence soit uniforme dans l'intervalle entier* $(-\infty, +\infty)$.

Pour la démonstration nous utiliserons le lemme suivant: Étant données une fonction $F(x)$, régulière dans le domaine $|x| \leq R$, et deux fonctions $g_1(x)$, $g_2(x)$ continues dans les intervalles $(R, R+d)$ resp. $(-R-d, -R)$ et se raccordant d'une manière continue à $F(x)$ pour $x = \pm R$; il correspond à chaque nombre positif ε un polynome $G_\varepsilon(x)$ tel qu'on ait

$$|F(x) - G_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x| \leq R$$

$$|g_1(x) - G_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad R \leq x \leq R + d$$

$$|g_2(x) - G_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad -R - d \leq x \leq -R$$

$$G_\varepsilon(R) = g_1(R), \qquad G_\varepsilon(-R) = g_2(-R)$$

$$G_\varepsilon(R + d) = g_1(R + d), \quad G_\varepsilon(-R - d) = g_2(-R - d).$$

Désignons, pour abrèger, par $D(R, d)$ le domaine composé par les intervalles $(-R - d, -R)$ et $(R, R + d)$ et par le cercle $|x| \leq R$. Soient $p_1(x)$, $p_2(x)$ deux polynomes satisfaisant aux conditions:

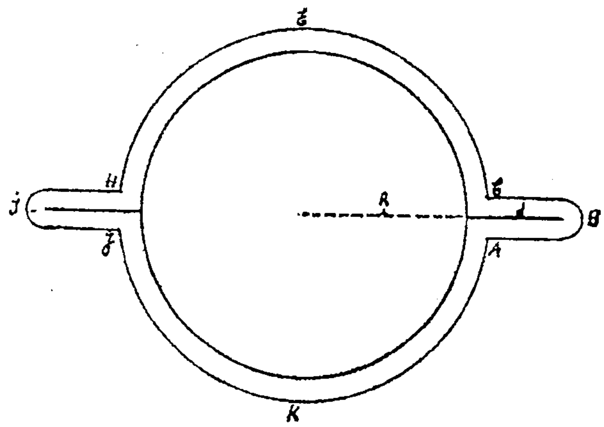
$$|p_1(x) - g_1(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad R \leq x \leq R + d$$

$$|p_2(x) - g_2(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad -R - d \leq x \leq -R$$

$$p_1(R) = F(R), \qquad p_1'(R) = F'(R).$$

$$p_2(-R) = F(-R), \quad p_2'(-R) = F'(-R).$$

$$p_1(R + d) = g_1(R + d), \quad p_2(-R - d) = g_2(-R - d).$$



Nous allons approcher à $F(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ par l'expression

$$L_\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ABC} \frac{p_1(z)}{z - x} dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CEH} \frac{F(z)}{z - x} dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{HIJ} \frac{p_2(z)}{z - x} dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{JKA} \frac{F(z)}{z - x} dz,$$

qui est une intégrale de CAUCHY étendue sur la courbe Γ_δ formée par l'ensemble des points dont la distance à $D(R, d)$ est égale à δ. On démontre facilement que $L_\delta(x)$ tend uniformément vers $F(x)$ pour $|x| \leq R$ et vers $p_2(x)$ resp. $p_1(x)$ dans les intervalles $(-R-d, -R)$, $(R, R+d)$. Désignons par $Q_\delta(x)$ un polynome du troisième dégré tel que la fonction $M_\delta(x) = L_\delta(x) + Q_\delta(x)$ prenne les mêmes valeurs que $p_1(x)$ et $p_2(x)$ en les points R, $R+d$ resp. $-R$, $-R-d$. On voit aisément que les coefficients de $Q_\delta(x)$ tendent vers zéro pour $\delta \to 0$. Il en résulte l'existence d'un nombre positif δ tel que l'on ait

$$|F(x) - M_\delta(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad |x| \leq R$$

$$|g_1(x) - M_\delta(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad R \leq x \leq R+d$$

$$|g_2(x) - M_\delta(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad -R-d \leq x \leq -R.$$

Pour achever la démonstration du lemme enoncé plus haut, il suffit maintenant de remarquer qu'on peut trouver un polynome $G_\varepsilon(x)$ qui à l'intérieur de $\Gamma_{\frac{\delta}{2}}$ diffère de $M_\delta(x)$ d'une quantité inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$, et qui prend pour $x = \pm R$, $x = \pm(R+d)$ les mêmes valeurs que $M_\delta(x)$.

Il nous est actuellement possible de démontrer, comme il suit, l'existence d'une fonction entière $F_\varepsilon(x)$ telle qu'on ait $|f(x) - F_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ pour $-\infty < x < +\infty$, où $f(x)$ est une fonction continue donnée et ε un nombre positif aussi petit que l'on veut. Soit $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n + \cdots$ une série de quantités positives dont la somme est inférieure à ε. Choisissons un polynome $P_1(x)$ tel que l'on ait $P_1(\pm 1) = f(\pm 1)$ et $|f(x) - P_1(x)| < \alpha_1$ pour $-1 \leq x \leq 1$. Puis nous déterminerons par récurrence, en utilisant le lemme précédent, une suite de polynomes $P_n(x)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ par les conditions suivantes:

$$|P_n(x) - P_{n-1}(x)| < \alpha_n \quad \text{pour} \quad |x| \leq n-1$$

$$(1) \qquad |P_n(x) - f(x)| < \alpha_n \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} -n \leq x \leq -n+1 \\ n-1 \leq x \leq n \end{matrix}$$

$$P_n(\pm(n-1)) = f(\pm(n-1)), \quad P_n(\pm n) = f(\pm n).$$

La suite $P_n(x)$ ainsi définie tend vers une fonction entière $F_\varepsilon(x)$ lorsque $n \to \infty$. On a, en effet, quel que soit l'entier positif m,

$$(2)\qquad P_1(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(P_{\nu+1}(x) - P_\nu(x)) = P_m(x) + \sum_{\nu=m}^{\infty}(P_{\nu+1}(x) - P_\nu(x)),$$

où la série du second membre admet la majorante

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} \alpha_{\nu+1} \quad \text{pour} \quad |x| \leq m.$$

Les formules (1) et (2) montrent aussi que l'on a

$$|F_\varepsilon(x) - f(x)| \leq |P_m(x) - f(x)| + \sum_{\nu=m}^{\infty} \alpha_{\nu+1} < \alpha_m + \alpha_{m+1} + \cdots$$

pour $\qquad m-1 \leq x \leq m, \quad -m \leq x \leq -m+1.$

Il s'ensuit

$$|f(x) - F_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad -\infty < x < +\infty,$$

et en outre

$$\lim_{x \to \infty} (F_\varepsilon(x) - f(x)) = 0.$$

On voit en même temps que les α_ν peuvent être choisis de manière que l'expression $F_\varepsilon(x) - f(x)$, lorsque $x \to \infty$, tende vers zéro aussi rapidement que l'on veut.

En prenant une suite de nombres positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ tendant vers zéro lorsque $n \to \infty$, on voit qu'il existe une série de fonctions entières

$$F_{\varepsilon_1}(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(F_{\varepsilon_{\nu+1}}(x) - F_{\varepsilon_\nu}(x))$$

qui converge uniformément vers $f(x)$ pour $-\infty < x < +\infty$. c. q. f. d.

Le théorème que nous avons demontré admet plusieurs généralisations. On peut remplacer, dans l'énoncé du théorème, l'axe réel par une courbe rectifiable ne se coupant pas et allant à l'infini ou par des systèmes de courbes vérifiant certaines conditions. Comme corollaire on obtient facilement un théorème bien connu de M. Gross sur les valeurs asymptotiques des fonctions entières. Nous pouvons aussi démontrer la proposition suivante: *Étant donnés un nombre positif* ε *et une fonction* $f(z)$ *régulière en chaque point fini à l'interieur ou sur le contour d'un domaine* D *limité par une seule courbe sans points multiples et s'étendant à l'infini, on peut toujours trouver une fonction entière* $F_\varepsilon(z)$ *telle que l'on ait* $|f(z) - F_\varepsilon(z)| < \varepsilon$ *dans tout le domaine* D.

Tryckt den 22 november 1927.

Uppsala 1927. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.